

# 基于线性规划的分数阶系统有理函数逼近方法

左信, 庄馨, 许鋈, 谭壮壮

中国石油大学(北京)自动化系, 北京 102249

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61104218)

通信作者: 左信, zuox@cup.edu.cn 收稿/录用/修回: 2013-10-08/2014-01-24/2014-09-16

## 摘要

针对分数阶系统在进行有理函数近似时, 往往会存在得到的有理函数阶次较高、近似精度低或优化速度慢等问题, 本文基于频域误差极小化原理, 提出了一种利用低阶有理传递函数逼近分数阶系统的方法. 该方法将分数阶系统和其有理逼近函数之间的误差极小化运算转化为一个线性规划问题进行求解, 避免了求解方程组和非线性问题的复杂运算. 仿真验证结果表明, 与 Charef 近似法及 Oustaloup 近似法相比, 在整个需要逼近的频段内, 利用该方法得到的有理逼近函数能够以较低的阶次达到较好的近似效果. 该方法不仅适用于具有分数次幂极点的系统, 也适用于由分数阶微分算子组成的一般形式的分数阶系统, 且降低了计算复杂度, 提高了优化速度.

## 关键词

分数阶系统  
有理逼近函数  
线性规划  
频域误差极小化  
具有分数次幂极点的系统  
中图分类号: TP273  
文献标识码: A

## Rational Function Approximation Method for Fractional Order System Based on Linear Programming

ZUO Xin, ZHUANG Xin, XU Jun, TAN Zhuangzhuang

Department of Automation, China University of Petroleum-Beijing, Beijing 102249, China

## Abstract

The rational approximation of a fractional order system usually has some disadvantages: the order of the rational transfer function is high, the approximating precision is low, and the optimization speed is too slow. We propose a method of approximating the fractional order system using a lower order rational transfer function based on error minimum theory in the frequency domain. The method transforms the calculation of the minimum error between the fractional order system and its rational approximation function into a linear programming problem, thus avoiding having to solve a system of equations and nonlinear problems. Simulation results show that the rational approximation function constructed by the proposed method can achieve a better approximation effect with lower order in the whole frequency range of interest compared with the Charef and Oustaloup methods. The proposed method can apply to systems with fractional power poles and general fractional order systems composed of fractional order differential operators. The proposed method reduces the computation complexity and improves the optimization speed.

## Keywords

fractional order system;  
rational approximation function;  
linear programming;  
error minimum in frequency domain;  
system with fractional power pole

## 1 引言

实际系统大多是分数阶的<sup>[1]</sup>, 如扩散模型<sup>[2]</sup>、电学过程<sup>[3]</sup>、摩擦和噪声现象<sup>[4]</sup>等, 由于这些对象带有显著的分数阶特性, 所以采用分数阶模型能更好地描述这些对象. 然而, 相对于整数阶系统, 分数阶系统往往更为复杂, 本质上是无穷维系统<sup>[5]</sup>, 其特征方程是一个具有复变量分数阶指数的伪多项式, 直接对其进行研究比较困难. 因

此, 采用整数阶有理函数对分数阶系统进行近似, 将分数阶系统转化成有理传递函数的形式, 是一种常用的方式.

将分数阶系统转化成整数阶系统, 有许多近似方法, 如, 连分式展开法<sup>[6]</sup>、幂级数展开法<sup>[7-8]</sup>、Charef 法<sup>[9]</sup>、改进的 Charef 法<sup>[10]</sup>、Oustaloup 法<sup>[11]</sup>及改进的 Oustaloup 法<sup>[5]</sup>等. 对于分数阶微分算子和由分数阶微分算子组成的一般形式的分数阶系统的近似, 目前常用的是 Oustaloup 法及其改进法. 这两种方法是基于函数逼近, 通过选取零

极点的方式对分数阶微分算子的幅频特性曲线进行拟合,以获取逼近的整数阶模型.因此利用这两种方法对分数阶系统的近似,实质上是对系统中每一个分数阶微分算子用若干整数阶微分算子逼近,得到的整数阶模型阶次非常高,不利于进一步的研究,并且不适用于对具有分数次幂极点系统<sup>[9]</sup>的近似.对于具有分数次幂极点系统的近似,常用的是 Charef 法和改进的 Charef 法,与 Oustaloup 法类似,也是通过零极点对的选取确定分数阶系统的幅频特性渐近线,以获取有理逼近函数<sup>[9]</sup>.然而,由于 Charef 法零极点对选取的不灵活,其相频特性的近似效果并不理想.改进的 Charef 法采用参数优化的方法增加了零极点对选取的灵活性,从而实现了幅频和相频特性的较好近似.但是该方法中采用非线性优化,优化速度较慢.并且这两种逼近法只适用于具有单分数次幂极点(single fractional power pole, SFPP)(幅频特性曲线斜率为 $-20 \sim 0$ )且不具有谐振峰值的分数阶系统,不适用于分数阶微分算子和由分数阶微分算子组成的一般形式的分数阶系统.

基于以上问题,本文首先假定分数阶系统的有理逼近函数模型,然后在关心的频段内,寻找有理逼近函数的一组最优参数,与已知分数阶系统的频率响应曲线进行拟合.频域曲线拟合的概念最先由 Levy<sup>[12]</sup>提出,用于对整数阶系统的降阶,本文将其应用到由分数阶系统向整数阶系统的逼近.通过使分数阶系统模型和有理逼近函数模型频率响应之间的误差极小化来确定有理逼近函数.因此,整个逼近问题就转化为一个误差极小化的参数优化问题.对于误差极小化运算,Levy 曾提出最小二乘法的误差准则<sup>[12]</sup>,但该方法会涉及到复杂的方程组求解,并且该方程组存在很难求解的殆奇异(almost singular)问题<sup>[13]</sup>.因此,为避免求解方程组和非线性问题等复杂运算,本文利用线性规划进行误差的极小化运算,从而降低了计算复杂度,提高了优化速度和精度.

## 2 频域误差极小化原理

运用频域响应误差极小化方法,进行分数阶系统模型向有理函数逼近的原理如图 1 所示<sup>[14]</sup>,其中,  $\Theta[\cdot]$  表示对误差  $\varepsilon(j\omega)$  所做的某种变换.通过使用各种优化算法,使误差变换的输出  $\Theta[\varepsilon(j\omega)]$  取最小值,求出此时有理逼近函数  $\hat{G}(j\omega)$  的系数.

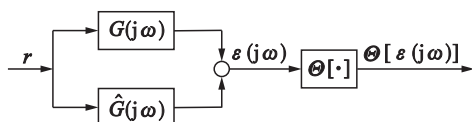


图 1 频域误差极小化方法进行系统逼近的原理图  
Fig.1 Schematic diagram of system approximation using the error minimization method in the frequency domain

对于任意一个分数阶系统  $G(s)$ ,通过某种近似算法,得到其有理逼近函数  $\hat{G}(s)$ ,假设其表达形式如(1)式所示,其中  $c_i, d_j (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m)$  为待求系数:

$$\hat{G}(s) = \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + 1} \quad (1)$$

分子分母的次数一般取  $n-m=0$  或  $n-m=1$ ,因为在同等计算量的前提下,一个分子分母同阶或阶次很接近的有理函数可以取得更好的分数阶系统逼近特性<sup>[15]</sup>.

有理逼近函数(1)的频域特性如式(2)所示,式中  $D(j\omega)$  和  $C(j\omega)$  是含有待求系数的复变量函数:

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{d_m (j\omega)^m + d_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + d_1 (j\omega) + d_0}{c_n (j\omega)^n + c_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + c_1 (j\omega) + 1} = \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)} \quad (2)$$

设需要逼近的频段为  $[\omega_b, \omega_h]$ ,  $\omega_i (i=1, 2, \dots, k)$  为在需要逼近的频带内选定的  $k$  个特征频率.分数阶系统  $G(j\omega)$  和有理逼近函数  $\hat{G}(j\omega)$  在频率点  $\omega_i$  处的误差  $\varepsilon(j\omega_i)$  为

$$\varepsilon(j\omega_i) = G(j\omega_i) - \hat{G}(j\omega_i) = G(j\omega_i) - \frac{D(j\omega_i)}{C(j\omega_i)} \quad (3)$$

其中,原分数阶系统  $G(s)$  在不同频率  $\omega_i (i=1, 2, \dots, k)$  处的频率响应数据  $G(j\omega_i)$  为已知.

频域误差极小化即极小化  $\varepsilon(j\omega_i)$ , 求出  $c_i, d_j (i=1, 2, \dots, n, j=0, 1, \dots, m)$ , 并代回模型(1)即可得到分数阶系统的有理逼近函数.

## 3 线性规划问题的转化

对于误差  $\varepsilon(j\omega_i)$  的极小化,Levy 曾提出最小二乘法的误差准则<sup>[12]</sup>:

$$J_{\text{Levy}} = \sum_{i=1}^k \|C(j\omega_i) \varepsilon(\omega_i)\|^2 \quad (4)$$

为方便求解,将已知分数阶系统频域特性分解为实频特性  $\text{Re } G_i$  和虚频特性  $\text{Im } G_i$ , 将有理逼近函数(2)进一步分解为含待求系数  $c_i, d_j (i=1, 2, \dots, n, j=0, 1, \dots, m)$  的实变量函数  $\alpha(\omega_i), \beta(\omega_i), \sigma(\omega_i)$  和  $\tau(\omega_i)$ , 即:

$$G(j\omega_i) = \text{Re } G_i + j \text{Im } G_i \quad (5)$$

$$\hat{G}(j\omega_i) = \frac{D(j\omega_i)}{C(j\omega_i)} = \frac{\alpha(\omega_i) + j\beta(\omega_i)}{\sigma(\omega_i) + j\tau(\omega_i)} \quad (6)$$

于是得

$$\begin{aligned} & G(j\omega_i) C(j\omega_i) - D(j\omega_i) \\ &= (\text{Re } G_i + j \text{Im } G_i) (\sigma_i + j\tau_i) - (\alpha_i + j\beta_i) \\ &= (\text{Re } G_i \cdot \sigma_i - \text{Im } G_i \cdot \tau_i - \alpha_i) + \\ & \quad j(\text{Re } G_i \cdot \tau_i + \text{Im } G_i \cdot \sigma_i - \beta_i) \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)代入式(4), 准则函数可表示为<sup>[13]</sup>

$$J_{\text{Levy}} = \sum_{i=1}^k [(\text{Re } \omega_i \cdot \sigma_i - \text{Im } \omega_i \cdot \tau_i - \alpha_i)^2 + (\text{Re } \omega_i \cdot \tau_i + \text{Im } \omega_i \cdot \sigma_i - \beta_i)^2] \quad (8)$$

为了使  $J_{\text{Levy}}$  取极小值,需应用函数极值的原理,使  $J_{\text{Levy}}$  分别对参数  $c_i, d_j (i=1, 2, \dots, n, j=0, 1, \dots, m)$  求偏导,并令其为 0, 得出一组线性方程.由此可以看出,如果应用 Levy 提出的最小二乘法的误差准则来解决本文中的拟合问题,则会涉及到复杂的方程组求解,并且导出的方程组存在很难求解的殆奇异问题,当数据分布范围扩大到几个 10 倍频程时拟合的效果不理想<sup>[14]</sup>.

为了避免这些问题,并提高优化速度和精度,本文采用式(9)所示的误差绝对值之和为目标函数,使频域误差

$\varepsilon(j\omega_i)$  极小化, 并通过引入辅助变量, 将误差的极小化运算转化为一个线性规划问题进行求解:

$$\min_{\hat{G}(j\omega_i)} \sum_{i=1}^k |G(j\omega_i) - \hat{G}(j\omega_i)| \quad (9)$$

由于  $\hat{G}(j\omega_i)$  分母中包含要估计的参数, 所以优化问题(9)是非线性规划, 难以求解. 为了简化计算过程, 与 Levy 法类似, 将频域误差  $\varepsilon(j\omega_i)$  极小化转化成  $C(j\omega_i)\varepsilon(j\omega_i)$  极小化, 即:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{C}(j\omega_i)} \sum_{i=1}^k |C(j\omega_i)\varepsilon(j\omega_i)| \\ &= \min_{C(j\omega_i), D(j\omega_i)} \sum_{i=1}^k |G(j\omega_i)C(j\omega_i) - D(j\omega_i)| \end{aligned} \quad (10)$$

由式(7)和式(10)得到此优化问题的目标函数为

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{d_0, d_1, \dots, d_m, \\ c_1, c_2, \dots, c_n}} \sum_{i=1}^k (|\operatorname{Re} G_i \cdot \sigma_i - \operatorname{Im} G_i \cdot \tau_i - \alpha_i| + \\ & \quad |\operatorname{Re} G_i \cdot \tau_i + \operatorname{Im} G_i \cdot \sigma_i - \beta_i|) \end{aligned} \quad (11)$$

由于目标函数中含有绝对值, 仍是一个非线性极小化问题, 为将此问题转化成线性极小化问题, 本文引入辅助变量  $U = [u_1, u_2, \dots, u_k]$  及  $V = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ , 使得

$$\begin{aligned} u_i &= |\operatorname{Re} G_i \cdot \sigma_i - \operatorname{Im} G_i \cdot \tau_i - \alpha_i| \\ v_i &= |\operatorname{Re} G_i \cdot \tau_i + \operatorname{Im} G_i \cdot \sigma_i - \beta_i| \\ i &= 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (12)$$

于是优化问题转化为:

目标函数:

$$\min_{\substack{d_0, d_1, \dots, d_m, c_1, c_2, \dots, c_n \\ u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k}} \sum_{i=1}^k (u_i + v_i) \quad (13)$$

约束函数:

$$\begin{cases} -u_i \leq \operatorname{Re} G_i \cdot \sigma_i - \operatorname{Im} G_i \cdot \tau_i - \alpha_i \leq u_i \\ -v_i \leq \operatorname{Re} G_i \cdot \tau_i + \operatorname{Im} G_i \cdot \sigma_i - \beta_i \leq v_i \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k \quad (14)$$

至此, 分数阶系统模型向有理函数的逼近问题转化为一个由目标函数(13)和约束函数(14)组成的线性规划问题. 现将目标函数和约束函数进行整理:

$\min f^T x$

$$x = [c_1, \dots, c_n, d_0, d_1, \dots, d_m, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k]^T$$

$$f^T = [0, \dots, 0, \underbrace{0, \dots, 0}_{m+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_k] \quad (15)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \operatorname{Re} G_i \cdot \sigma_i - \operatorname{Im} G_i \cdot \tau_i - \alpha_i - u_i \leq 0 \\ -\operatorname{Re} G_i \cdot \tau_i + \operatorname{Im} G_i \cdot \sigma_i + \alpha_i - u_i \leq 0 \\ \operatorname{Re} G_i \cdot \tau_i + \operatorname{Im} G_i \cdot \sigma_i - \beta_i - v_i \leq 0 \\ -\operatorname{Re} G_i \cdot \sigma_i - \operatorname{Im} G_i \cdot \tau_i + \beta_i - v_i \leq 0 \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (16)$$

进一步将约束函数(16)写成  $Ax \leq B$  的形式, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \overbrace{0 \quad \omega_1^2 \quad 0 \quad -\omega_1^4 \quad 0 \quad \dots}^m & \overbrace{-\operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1 \quad -\operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1^2 \quad \operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1^3 \quad \operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1^4 \quad \dots}^n & \overbrace{-1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k \\ 1 & \overbrace{0 \quad -\omega_1^2 \quad 0 \quad \omega_1^4 \quad 0 \quad \dots}^m & \overbrace{\operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1 \quad \operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1^2 \quad -\operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1^3 \quad -\operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1^4 \quad \dots}^n & \overbrace{-1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k \\ 0 & \overbrace{-\omega_1 \quad 0 \quad \omega_1^3 \quad 0 \quad -\omega_1^5 \quad \dots}^m & \overbrace{\operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1 \quad -\operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1^2 \quad -\operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1^3 \quad \operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1^4 \quad \dots}^n & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k \\ 0 & \overbrace{\omega_1 \quad 0 \quad -\omega_1^3 \quad 0 \quad \omega_1^5 \quad \dots}^m & \overbrace{-\operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1 \quad \operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1^2 \quad \operatorname{Re}G_1 \cdot \omega_1^3 \quad -\operatorname{Im}G_1 \cdot \omega_1^4 \quad \dots}^n & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \overbrace{0 \quad \omega_k^2 \quad 0 \quad -\omega_k^4 \quad 0 \quad \dots}^m & \overbrace{-\operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k \quad -\operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k^2 \quad \operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k^3 \quad \operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k^4 \quad \dots}^n & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k \\ 1 & \overbrace{0 \quad -\omega_k^2 \quad 0 \quad \omega_k^4 \quad 0 \quad \dots}^m & \overbrace{\operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k \quad \operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k^2 \quad -\operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k^3 \quad -\operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k^4 \quad \dots}^n & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}^k \\ 0 & \overbrace{-\omega_k \quad 0 \quad \omega_k^3 \quad 0 \quad -\omega_k^5 \quad \dots}^m & \overbrace{\operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k \quad -\operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k^2 \quad -\operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k^3 \quad \operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k^4 \quad \dots}^n & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}^k \\ 0 & \overbrace{\omega_k \quad 0 \quad -\omega_k^3 \quad 0 \quad \omega_k^5 \quad \dots}^m & \overbrace{-\operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k \quad \operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k^2 \quad \operatorname{Re}G_k \cdot \omega_k^3 \quad -\operatorname{Im}G_k \cdot \omega_k^4 \quad \dots}^n & \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}^k & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}^k \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$B = [-\operatorname{Re} G_1 \quad \operatorname{Re} G_1 \quad -\operatorname{Im} G_1 \quad \operatorname{Im} G_1 \quad \dots \quad -\operatorname{Re} G_k \quad \operatorname{Re} G_k \quad -\operatorname{Im} G_k \quad \operatorname{Im} G_k]^T \quad (18)$$

然后利用 Matlab 最优化工具箱中求解线性规划问题的 `linprog()` 函数, 即可求得该问题的解  $x = [c_1, \dots, c_n, d_0, d_1, \dots, d_m, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k]^T$ . 将参数  $c_i, d_j (i=1, 2, \dots, n, j=0, 1, \dots, m)$  代回有理函数(1), 即得到原分数阶系统的有理逼近函数.

## 4 仿真实验及结果分析

### 4.1 单分数次幂极点 (SFPP) 系统

具有分数次幂极点的系统如式(19)所示, 最先由 Charef<sup>[9]</sup> 引入用于描述分形系统的动力学特性, 也称为单分数次幂极点 (SFPP) 系统:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (19)$$

其中,  $\omega_c$  为转折频率,  $\alpha$  为分数阶次.

针对上述具有分数次幂极点的系统, Charef 法和改进的 Charef 法利用奇异函数原理, 通过零极点对  $(p_i, z_i) (i=$

$1, 2, \dots, N)$  和阶次  $N$  的选取, 将 SFPP 系统的无理传递函数近似成如式(20)所示的有理传递函数<sup>[9]</sup>:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + s/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1 + s/p_i)}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (20)$$

从式(20)可以看出, Charef 法及其改进法只适用于单分数次幂极点系统, 当对其它形式的分数次幂极点系统进行近似时, 如多分数次幂极点 (multiple fractional power pole, MFPP) 系统、FO (fractional order) 系统及分数阶振荡系统, 需首先利用文[16]中的方法将系统转化成单分数次幂极点系统<sup>[10]</sup>.

当  $\omega_c = 5, \alpha = 0.2$  时, SFPP 系统为

$$G(s) = 1/(1 + 0.2s)^{0.5} \quad (21)$$

假设需要逼近频段  $[10^{-3}, 10^3]$ , 利用 Charef 逼近法<sup>[9]</sup>、改进的 Charef 逼近法<sup>[10]</sup> 和本文提出的逼近法得到的有理逼近函数如下, 对应的 Bode 图如图 2 所示:

$$G_1(s) = \frac{99.7631(s+9.976)(s+25.06)(s+62.95)(s+158.1)(s+397.2)(s+997.6)}{(s+6.295)(s+15.81)(s+39.72)(s+99.76)(s+250.6)(s+629.5)(s+1581)} \quad (22)^{[10]}$$

$$G_2(s) = \frac{213.9196(s+9.648)(s+30.21)(s+88.48)(s+263)(s+805.2)(s+2124)}{(s+6.409)(s+17.1)(s+51.67)(s+153.9)(s+444.8)(s+1493)(s+4546)} \quad (23)^{[10]}$$

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{193.3812(s+8.899)(s+31.02)(s+140.1)(s+864.4)}{(s+5.843)(s+15.91)(s+63.96)(s+328)(s+3313)} \quad (24)$$

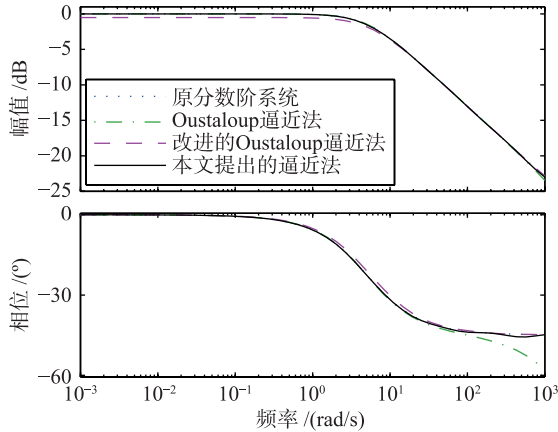


图2  $(1+0.2s)^{-0.5}$  和 3 个逼近系统的 Bode 图对比  
Fig.2 Comparison of Bode diagrams among  $(1+0.2s)^{-0.5}$  and three other approximate systems

从图2可以看出, Charef逼近法在幅频特性中能够对原分数阶系统进行很好的近似,但在相频特性中的近似效果不理想;改进的 Charef逼近法基本能对原分数阶系统进行较好的近似,但是还存在一定的误差.相比之下,本文

$$G_1(s) = \frac{4.9458(s+22.96)(s+296.5)(s+3829)}{(s+2.296)(s+29.65)(s+382.9)(s+4946)} \quad (27)^{[10]}$$

$$G_2(s) = \frac{4.6183(s+7.435)(s+141.3)(s+1270)}{(s+1.861)(s+11.85)(s+159.6)(s+1750)} \quad (28)^{[10]}$$

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{4.774(s+3.437)(s+27.89)(s+162.1)(s+1190)}{(s+1.601)(s+5.583)(s+33.25)(s+194.2)(s+1529)} \quad (29)$$

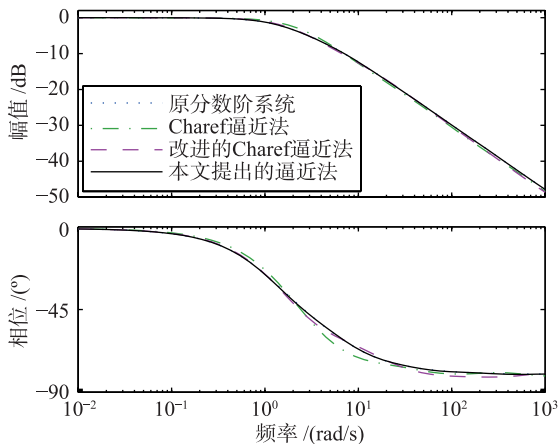


图3  $(1+s/1.3)^{-0.6}(1+s/6.2)^{-0.3}$  和 3 个逼近系统的 Bode 图对比  
Fig.3 Comparison of Bode diagrams among  $(1+s/1.3)^{-0.6} \cdot (1+s/6.2)^{-0.3}$  and three other approximate systems

从图3可以看出,利用本文提出的逼近法得到的频率

提出的方法具有更高的近似精度,得到的频率特性曲线在需要逼近的频段内基本与原分数阶系统重合,并且利用本文提出的逼近法得到的有理传递函数具有更低的阶次.另外本文提出的逼近法仿真时间为 0.078 0 s,优化速度较快.

#### 4.2 多分数次幂极点 (MFPP) 系统

一般来说,一个典型的系统比如分散系统,在整个频域范围内可能是由许多分数阶斜率组成,因此有下面的多分数次幂极点模型 (MFPP)<sup>[17]</sup>:

$$G_M(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p \left(1 + \frac{s}{\omega_{c_i}}\right)^{\alpha_i}}, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad 0 < \sum_{i=1}^p \alpha_i < 1 \quad (25)$$

当  $\omega_{c_1} = 1.3$ ,  $\omega_{c_2} = 6.2$ ,  $\alpha_1 = 0.6$ ,  $\alpha_2 = 0.3$  时, MFPP 系统为

$$G_M(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{1.3}\right)^{0.6} \left(1 + \frac{s}{6.2}\right)^{0.3}} \quad (26)$$

假设需要逼近的频段  $[10^{-2}, 10^3]$ , 利用 Charef逼近法、改进的 Charef逼近法和本文提出的逼近法得到的有理逼近函数如下,对应的 Bode 图如图3所示:

特性曲线在需要逼近的频段内与原分数阶系统重合,明显优于另两种近似法.虽然本文提出的逼近方法得到的有理逼近函数阶次比另外两种逼近法得到的有理函数高一个阶次,但是近似精度得到明显的提高.另外,本文提出的逼近法仿真时间为 0.031 0 s,优化速度较快.

#### 4.3 FO 系统

本文提出的逼近法也适用于 FO (fractional order) 系统,即具有下面形式的分数阶系统:

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha\right]^\beta}, \quad 0 < \alpha\beta < 1 \quad (30)$$

当  $\omega_c = 5$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 0.5$  时, FO 系统为

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{s}{5}\right)^{0.6}\right]^{0.5}} \quad (31)$$

假设需要逼近的频段  $[10^{-1}, 10^3]$ , 利用 Charef逼近法、改进的 Charef逼近法和本文提出的逼近法得到的有理逼近函数如下,对应的 Bode 图如图4所示:

$$G_1(s) = \frac{462.3278(s+29.82)(s+89.26)(s+267.2)(s+799.9)}{(s+21.46)(s+62.64)(s+192.3)(s+575.7)(s+1723)} \quad (32)^{[10]}$$

$$G_2(s) = \frac{997.0511(s+4.071)(s+22.63)(s+152.5)(s+749.4)}{(s+3.246)(s+18.46)(s+86.58)(s+557)(s+3633)} \quad (33)^{[10]}$$

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{1311.0064(s+5.384)(s+47.73)(s+212.8)(s+1026)}{(s+3.646)(s+31.24)(s+142.2)(s+620.2)(s+7961)} \quad (34)$$

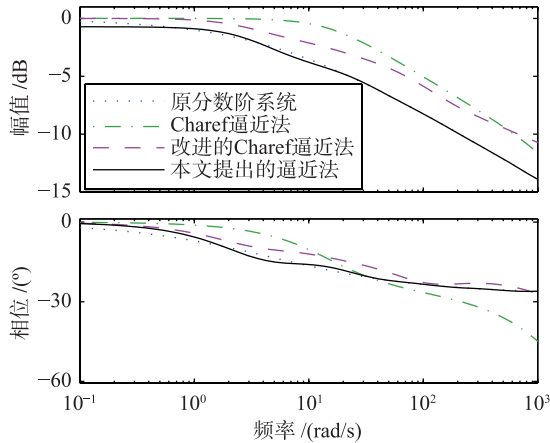


图4  $(1 + (s/5)^{0.6})^{-0.5}$  和 3 个近似系统的 Bode 图对比  
Fig.4 Comparison of Bode diagrams among  $(1 + (s/5)^{0.6})^{-0.5}$  and three other approximate systems

从图4可以看出,在有理逼近函数阶次相同的情况下,本文提出的方法比另外两种方法得到的结果近似精度要高很多.本文提出的逼近法仿真时间为0.1250 s,优化速度较快.

#### 4.4 分数阶振荡系统

分数阶振荡系统,即具有复数极点的分数次幂极点系统.对于分数阶振荡系统的研究,目前主要集中在系统的稳定性<sup>[18-20]</sup>及其特征根分布<sup>[21]</sup>方面.

文[18, 21]针对形如:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega_c^2)^\alpha} \quad (35)$$

的分数阶振荡系统进行了分析,从理论上证明了分数阶次的变化对系统特征根分布及其稳定性的影响.并得出如下结论<sup>[18, 21]</sup>:当 $0 < \alpha < 1$ 时,系统的特征根全部分布在复数平面的左半平面,系统严格稳定;当 $\alpha = 1$ 时,系统临界稳定即自由振荡;当 $\alpha > 1$ 时,存在位于复数平面右半平面的特征根,系统不稳定.文[21]进一步将这一结论推广到

$$G_1(s) = \frac{210.8483(s+9.787)(s+25.54)(s+66.68)(s+174)(s+454.3)(s+1186)}{(s+6.668)(s+17.4)(s+45.43)(s+118.6)(s+309.5)(s+807.8)(s+2108)} \quad (39)^{[10]}$$

$$G_2(s) = \frac{470.8095(s+16.12)(s+45.99)(s+161.4)(s+511.7)(s+1535)(s+5310)}{(s+8.523)(s+31.61)(s+95.29)(s+318.1)(s+1122)(s+3432)(s+7472)} \quad (40)^{[10]}$$

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{527.3442(s+15.78)(s+60.38)(s+229.6)(s+1108)}{(s+8.398)(s+35.82)(s+133)(s+556.3)(s+5745)} \quad (41)$$

从图5可以看出,在逼近精度方面,Charef逼近法在相频特性中近似效果不理想,而利用本文提出的逼近法和改进的Charef逼近法得到的频率特性曲线在需要逼近的频段内几乎与原分数阶系统重合.从有理逼近函数阶次上看,本

文提出的一般形式的分数阶振荡系统:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2)^\alpha} \quad (36)$$

为了更好地研究分数阶振荡系统的特性,下面利用本文提出的逼近方法,对分数阶振荡系统进行有理逼近,从而可以利用整数阶中的方法对分数阶振荡系统的特性作进一步分析.

本文针对如下形式的分数阶振荡系统进行有理近似:

$$G(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1\right]^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (37)$$

通过对上述分数阶振荡系统进行频率特性分析,得出<sup>[10]</sup>:

(1) 当 $\sqrt{2}/2 < \xi < 1$ 时,系统的谐振频率 $\omega_r$ 和谐振峰值 $M_r$ 不存在.

(2) 当 $\xi = \sqrt{2}/2$ 时,  $c = 0$ ,  $M_r = 1$ .

(3) 当 $0 < \xi < \sqrt{2}/2$ 时,  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ ,  $M_r = A(\omega_r) = (2\xi\sqrt{1 - \xi^2})^{-\alpha}$ .

(4) 当 $\xi = 0$ 时,  $\omega_r = \omega_n$ ,  $M_r = \infty$ .

因此,在进行分数阶振荡系统的近似时,要综合考虑系统阶次 $\alpha$ 和阻尼比 $\xi$ 两个参数.

##### 4.4.1 $0 < \alpha < 0.5$ 时的分数阶振荡系统

(1)  $\sqrt{2}/2 < \xi < 1$

在这种情况下,分数阶振荡系统不存在谐振峰值,且系统的幅频特性曲线斜率为 $-20 \sim 0$ ,可以直接应用Charef逼近法、改进的Charef逼近法对其进行逼近.

当 $\omega_c = 5$ ,  $\xi = 0.85$ ,  $\alpha = 0.2$  ( $0 < \alpha < 0.5$ )时,分数阶振荡系统为

$$G(s) = \left(\frac{25}{s^2 + 8.5s + 25}\right)^{0.2} \quad (38)$$

假设需要逼近的频段为 $[10^{-2}, 10^3]$ ,利用Charef逼近法、改进的Charef逼近法<sup>[10]</sup>和本文提出的逼近法得到的有理逼近函数如下,对应的Bode图如图5所示:

文提出的逼近法得到的有理逼近函数阶次为5阶,另两种方法得到的有理函数为7阶,即在逼近精度相同的情况下,本文提出的逼近法得到的有理逼近函数阶次更低.另外,本文提出的逼近法仿真时间为0.0470 s,优化速度较快.



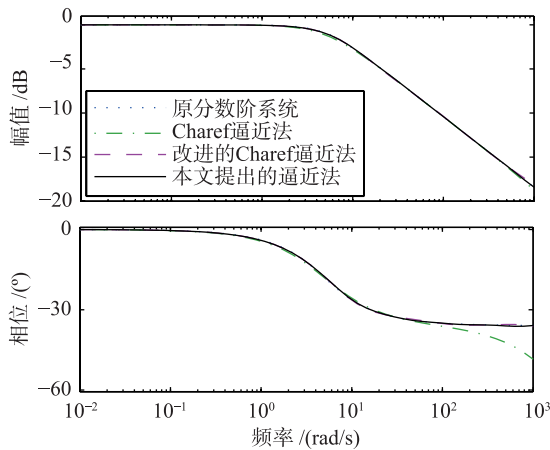


图5  $(25/(s^2 + 8.5s + 25))^{0.2}$  和 3 个逼近系统 Bode 图对比  
Fig.5 Comparison of Bode diagrams among  $(25/(s^2 + 8.5s + 25))^{0.2}$  and three other approximate systems

(2)  $0 < \xi < \sqrt{2}/2$

在这种情况下, 虽然分数阶振荡系统的幅频特性曲线斜率为  $-20 \sim 0$ , 但是系统存在谐振峰值, 直接应用 Charef 逼近法和改进的 Charef 法会有很大的逼近误差, 因此, 文[10]提出一种补偿方法, 其有理逼近传递函数如式(42)所示:

$$G(s) = \frac{\omega_{np}^2 (s^2 + 2\xi_z \omega_{nz} s + \omega_{nz}^2)}{\omega_{nz}^2 (s^2 + 2\xi_p \omega_{np} s + \omega_{np}^2)} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + s/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1 + s/p_i)} \quad (42)$$

其中零极点对  $(p_i, z_i)$  由改进的 Charef 逼近法得到,  $[\omega_{np},$

$$G_1(s) = \frac{18\ 223.663\ 6(s+1\ 504)(s+3\ 926)(s+10\ 250)(s+26\ 750)(s+69\ 820)}{(s+1\ 025)(s+2\ 657)(s+6\ 982)(s+18\ 220)(s+47\ 570)(s+124\ 200)} \quad (44)^{[10]}$$

$$G_2(s) = \frac{41\ 449.498\ 3(s+1\ 601)(s+1.15 \times 10^4)(s+6.46 \times 10^4)(s^2 + 1\ 035s + 5.906 \times 10^5)}{(s+962.9)(s+5\ 097)(s+3.451 \times 10^4)(s+2.911 \times 10^5)(s^2 + 809.7s + 5.906 \times 10^5)} \quad (45)^{[10]}$$

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{12\ 773.157\ 8(s+7\ 708)(s^2 + 1\ 479s + 1.146 \times 10^6)}{(s+3\ 310)(s+4.161 \times 10^4)(s^2 + 1\ 018s + 8.226 \times 10^5)} \quad (46)$$

从图 6 可以看出, 在逼近精度方面, 本文提出的逼近法得到的频率特性曲线在需要逼近的频段内与原分数阶系统重合, 而 Charef 逼近法和改进的 Charef 逼近法逼近效果不理想. 从有理逼近函数阶次上看, 本文提出的逼近法得到的有理逼近函数阶次为 4 阶, 另两种方法得到的有理函数为 6 阶. 因此, 本文提出的逼近法得到的有理逼近函数逼近效果更好而且阶次更低. 另外, 本文提出的逼近法仿真时间为 0.015 0 s, 优化速度快, 并且可以直接对具有谐振峰值的分数阶振荡系统进行近似, 不需要补偿, 操作简单.

4.4.2  $0.5 < \alpha < 1$  时的分数阶振荡系统

当  $\omega_c = 0.5, \xi = 0.85, \alpha = 0.7$  时, 分数阶振荡系统为

$$G(s) = \left( \frac{25}{s^2 + 8.5s + 25} \right)^{0.7} \quad (47)$$

$$G_1(s) = \frac{931.898\ 4(s+12.7)^2(s+38.01)^2(s+113.8)^2(s+340.6)^2(s+1\ 020)^2}{(s+5.894)^2(s+17.64)^2(s+52.82)^2(s+158.1)^2(s+473.3)^2(s+1\ 417)^2} \quad (49)^{[10]}$$

$$G_2(s) = \frac{1\ 512.489\ 4(s+16.92)^2(s+42.48)^2(s+105.6)^2(s+348)^2(s+851.9)^2}{(s+6.696)^2(s+20.22)^2(s+61.69)^2(s+141.9)^2(s+439.4)^2(s+1\ 680)^2} \quad (50)^{[10]}$$

$\xi_p, \omega_{nz}, \xi_z]$  利用初始值  $[\omega_c, \xi, \omega_c, \xi]$  进行优化得到<sup>[10]</sup>. 而利用本文提出的逼近法可以直接对具有谐振峰值的分数阶振荡系统进行近似.

当  $\omega_c = 768.485\ 5, \xi = 0.3, \alpha = 0.2$  时, 分数阶振荡系统如下:

$$G(s) = \left( \frac{590\ 570}{s^2 + 461.091\ 3s + 590\ 570} \right)^{0.7} \quad (43)$$

假设需要逼近的频段为  $[10^{-1}, 10^4]$ , 利用 Charef 逼近法、式(42)所示的改进的 Charef 逼近法和本文提出的逼近法得到的有理逼近函数如下, 对应的 Bode 图如图 6 所示:

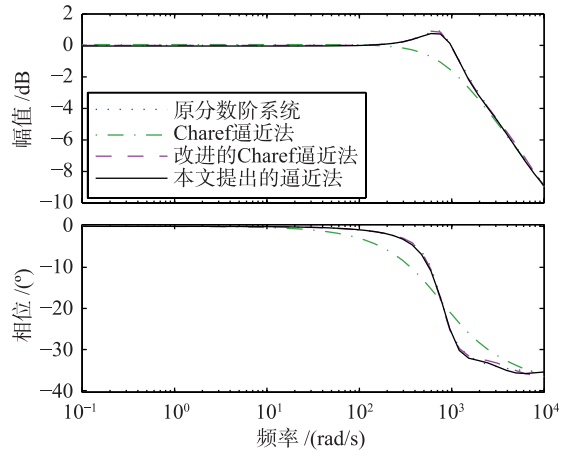


图6  $(590\ 570/(s^2 + 461.091\ 3s + 590\ 570))^{0.2}$  和 3 个逼近系统 Bode 图对比  
Fig.6 Comparison of Bode diagrams among  $(590\ 570/(s^2 + 461.091\ 3s + 590\ 570))^{0.2}$  and three other approximate systems

该分数阶振荡系统不存在谐振峰值, 但是系统的幅频特性曲线斜率为  $-40 \sim -20$ , 而 Charef 逼近法、改进的 Charef 逼近法只能适用于幅频特性曲线斜率为  $-20 \sim 0$  的分数阶系统, 因此需要将该分数阶系统模型分解为 2 个幅频特性曲线斜率为  $-20 \sim 0$  的分数阶系统, 如式(43)所示, 然后再分别进行逼近:

$$G(s) = \left( \frac{25}{s^2 + 8.5s + 25} \right)^{0.35} \cdot \left( \frac{25}{s^2 + 8.5s + 25} \right)^{0.35} \quad (48)$$

假设需要逼近的频段为  $[10^{-2}, 10^3]$ , 利用 Charef 逼近法、改进的 Charef 逼近法<sup>[10]</sup> 和本文提出的逼近法得到的有理逼近函数如式(49) ~ (51) 所示, 对应的 Bode 图如图 7 所示:

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{0.253 \ 39(s+7.661)(s+27.67)(s+99.53)(s+420.4)(s+3 \ 368)}{(s+16.96)(s+58.88)(s+229.7)(s+1 \ 214)(s^2+9.147s+27.2)} \quad (51)$$

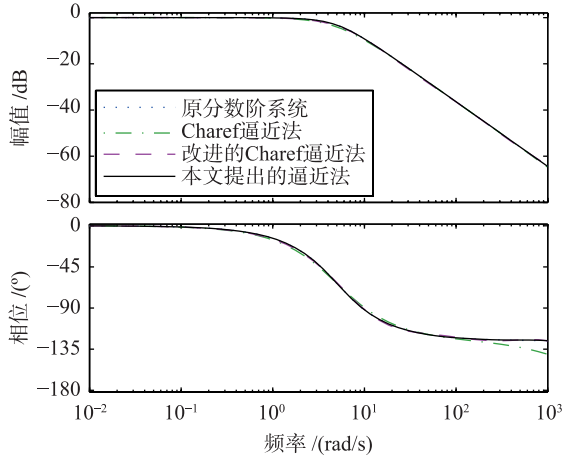


图7  $(25/(s^2+8.5s+25))^{0.7}$ 和3个逼近系统 Bode 图对比  
Fig.7 Comparison of Bode diagrams among  $(25/(s^2+8.5s+25))^{0.7}$  and three other approximate systems

从图7可以看出,本文提出的逼近法和改进 Charef 逼近法得到的频率特性曲线在需要逼近的频段内几乎与原分数阶系统重合.从有理逼近函数阶次上看,利用本文提出的逼近法得到的有理逼近函数阶次为6阶,另两种方法得到的有理函数阶次为12阶,即在近似精度相同的情况下,本文提出的逼近法能得到的有理逼近函数阶次明显降低.本文提出的逼近法的仿真时间为0.078 0 s,优化速度较快.

#### 4.5 一般形式的分数阶系统

利用本文提出的方法对一般形式的分数阶系统进行逼近,并将仿真结果与 Oustaloup 法、改进的 Oustaloup 法进行对比.要逼近的一般形式的分数阶系统如下:

$$G(s) = \frac{s+1}{10s^{3.2}+185s^{2.5}+288s^{0.7}+1} \quad (52)$$

假设需要逼近频段为 $[10^{-3}, 10^3]$ ,利用 Oustaloup 近似法<sup>[11]</sup>、改进的 Oustaloup 近似法<sup>[5]</sup>对分数阶系统中每一个分数阶微分算子用整数阶近似,取阶次 $N=3$ ,得到的有理逼近函数如式(53)~(55)所示,对应的 Bode 图如图8所示:

$$G_1(s) = \frac{(0.025 \ 12s^{22} + 52.78s^{21} + 4.095 \times 10^4 s^{20} + 1.452 \times 10^7 s^{19} + 2.441 \times 10^9 s^{18} + 2.084 \times 10^{11} s^{17} + 9.203 \times 10^{12} s^{16} + 2.07 \times 10^{14} s^{15} + 2.467 \times 10^{15} s^{14} + 1.583 \times 10^{16} s^{13} + 5.471 \times 10^{16} s^{12} + 1.064 \times 10^{17} s^{11} + 1.192 \times 10^{17} s^{10} + 7.667 \times 10^{16} s^9 + 2.767 \times 10^{16} s^8 + 5.543 \times 10^{15} s^7 + 6.004 \times 10^{14} s^6 + 3.361 \times 10^{13} s^5 + 9.808 \times 10^{11} s^4 + 1.459 \times 10^{10} s^3 + 1.031 \times 10^8 s^2 + 3.335 \times 10^5 s + 398.1)}{(s^{24} + 2 \ 075s^{23} + 1.582 \times 10^6 s^{22} + 5.563 \times 10^8 s^{21} + 9.745 \times 10^{10} s^{20} + 8.994 \times 10^{12} s^{19} + 4.452 \times 10^{14} s^{18} + 1.183 \times 10^{16} s^{17} + 1.696 \times 10^{17} s^{16} + 1.313 \times 10^{18} s^{15} + 5.55 \times 10^{18} s^{14} + 1.353 \times 10^{19} s^{13} + 2.15 \times 10^{19} s^{12} + 2.479 \times 10^{19} s^{11} + 1.985 \times 10^{19} s^{10} + 9.497 \times 10^{18} s^9 + 2.48 \times 10^{18} s^8 + 3.432 \times 10^{17} s^7 + 2.459 \times 10^{16} s^6 + 9.085 \times 10^{14} s^5 + 1.732 \times 10^{13} s^4 + 1.664 \times 10^{11} s^3 + 7.805 \times 10^8 s^2 + 1.684 \times 10^6 s + 1 \ 309)} \quad (53)^{[5]}$$

$$G_2(s) = \frac{(0.020 \ 52s^{28} + 193.2s^{27} + 6.867 \times 10^5 s^{26} + 1.201 \times 10^9 s^{25} + 1.133 \times 10^{12} s^{24} + 5.926 \times 10^{14} s^{23} + 1.697 \times 10^{17} s^{22} + 2.566 \times 10^{19} s^{21} + 2.072 \times 10^{21} s^{20} + 8.876 \times 10^{22} s^{19} + 1.967 \times 10^{24} s^{18} + 2.326 \times 10^{25} s^{17} + 1.486 \times 10^{26} s^{16} + 5.126 \times 10^{26} s^{15} + 9.957 \times 10^{26} s^{14} + 1.116 \times 10^{27} s^{13} + 7.179 \times 10^{26} s^{12} + 2.594 \times 10^{26} s^{11} + 5.21 \times 10^{25} s^{10} + 5.673 \times 10^{24} s^9 + 3.21 \times 10^{23} s^8 + 9.559 \times 10^{21} s^7 + 1.479 \times 10^{20} s^6 + 1.139 \times 10^{18} s^5 + 4.393 \times 10^{15} s^4 + 8.11 \times 10^{12} s^3 + 6.223 \times 10^9 s^2 + 1.936 \times 10^6 s + 189.7)}{(s^{30} + 9 \ 193s^{29} + 3.151 \times 10^7 s^{28} + 5.257 \times 10^{10} s^{27} + 4.724 \times 10^{13} s^{26} + 2.37 \times 10^{16} s^{25} + 6.635 \times 10^{18} s^{24} + 1.027 \times 10^{21} s^{23} + 8.822 \times 10^{22} s^{22} + 4.187 \times 10^{24} s^{21} + 1.086 \times 10^{26} s^{20} + 1.534 \times 10^{27} s^{19} + 1.177 \times 10^{28} s^{18} + 4.949 \times 10^{28} s^{17} + 1.2 \times 10^{29} s^{16} + 1.895 \times 10^{29} s^{15} + 2.17 \times 10^{29} s^{14} + 1.73 \times 10^{29} s^{13} + 8.265 \times 10^{28} s^{12} + 2.159 \times 10^{28} s^{11} + 2.995 \times 10^{27} s^{10} + 2.157 \times 10^{26} s^9 + 8.042 \times 10^{24} s^8 + 1.561 \times 10^{23} s^7 + 1.554 \times 10^{21} s^6 + 7.856 \times 10^{18} s^5 + 1.992 \times 10^{16} s^4 + 2.387 \times 10^{13} s^3 + 1.215 \times 10^{10} s^2 + 2.576 \times 10^6 s + 189.7)} \quad (54)^{[5]}$$

$$G_{\text{new}}(s) = \frac{(5.842 \times 10^{-10} s^9 + 3.144 \times 10^{-7} s^8 + 0.004 \ 791s^7 + 3.326 \times 10^{-5} s^6 + 15.43s^5 + 278.4s^4 + 763.9s^3 + 409.5s^2 + 38.94s + 0.395 \ 6)}{(5.021 \times 10^{-5} s^{10} + 0.173 \ 9s^9 + 2.623s^8 + 538.8s^7 + 1.923 \times 10^4 s^6 + 9.418 \times 10^4 s^5 + 7.752 \times 10^4 s^4 + 1.443 \times 10^5 s^3 + 2.631 \times 10^4 s^2 + 635.3s + 1)} \quad (55)$$

由图8可以看出,在逼近精度方面,本文提出的逼近法的拟合效果介于两者之间,在低频段的近似效果不太理想;从有理逼近函数阶次上分析,利用改进的 Oustaloup 近似法得到的整数阶模型阶次达到30阶,会使系统的控制变得异常困难,而本文提出的方法得到的整数阶模型阶次为10阶,远低于 Oustaloup 近似法得到的有理逼近函数阶次;从优化时间上分析, Oustaloup 近似法优化时间为0.078 0 s,改进的 Oustaloup 近似法优化时间为0.094 0 s,

本文提出的逼近法优化时间为0.048 0 s,从而验证了本文提出的逼近法所用仿真时间最短,优化速度加快.

## 5 总结

综上所述,本文提出的逼近法是根据频域误差极小化原理,通过频率曲线拟合对分数阶系统直接进行有理函数近似,所以不仅适用于具有分数次幂点的系统,也适用于一般形式的分数阶系统.同时避免了对分数阶系统中的每一

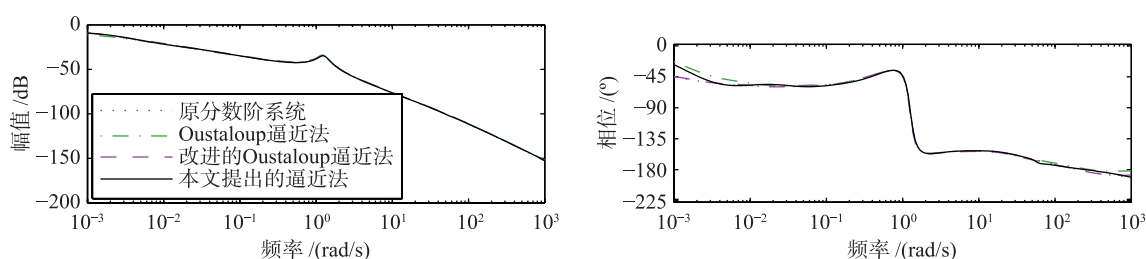


图8 原分数阶系统和3个逼近系统的Bode图对比

Fig.8 Comparison of Bode diagrams among the true fractional system and three other approximate systems

个分数阶微分算子分别进行近似从而产生阶次非常高的整数阶模型。因此,在整个需要逼近的频段内,利用本文提出的逼近法得到的有理逼近函数能够以较低的阶次达到较好的近似效果。另外,从仿真时间上可以看出,将误差极小化过程转化为线性规划问题求解,使求解变得简单快捷,优化速度加快。

但是由于 Matlab 处理问题的精度有限,利用本文提出

的方法进行数值运算过程中,当有理逼近函数阶次较高时,需要逼近频段的范围过大会导致 Matlab 不能得到精确的处理结果,从而会影响低频或高频处的近似效果。另外,在误差的处理过程中,为了简化计算过程,把误差乘了一个分母,在一定程度上会影响结果的精确度。因此,如何避免这些不足,是接下来需要重点研究的问题。

## 参考文献

- [1] Torvik P J, Bagley R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(2): 294 - 298.
- [2] Caputo M. Distributed order differential equations modeling dielectric induction and diffusion[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2001, 4(4): 421 - 442.
- [3] Bisquet J, Compte A. Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion[J]. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 2001, 499(1): 112 - 120.
- [4] 赵元英,袁晓,滕旭东,等. 常用周期信号的分数微分运算[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2004, 36(2): 94 - 97.  
Zhao Y Y, Yuan X, Teng X D, et al. Fractional order differentiation of periodical signals[J]. *Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition*, 2004, 36(2): 94 - 97.
- [5] Xue D Y, Zhao C N, Chen Y Q. A modified approximation method of fractional order system[C]//*IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006: 1043 - 1048.
- [6] Vinagre B M, Chen Y Q, Petras I. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiation/integrator[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2003, 340(5): 349 - 362.
- [7] Hamdaoui K, Charef A. A new discretization method for fractional order differentiators via the bilinear transformation[C]//*Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2007: 280 - 283.
- [8] Tricaud C, Chen Y Q. An approximate method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 59(5): 1644 - 1655.
- [9] Charef A, Sun H, Tsao Y, et al. Fractional system as represented by singularity function[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(9): 1465 - 1470.
- [10] Meng L, Xue D Y. A new approximation algorithm of fractional order system models based optimization[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2012, 134(4): 044504.
- [11] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis[J]//*IEEE Transactions on Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(1): 25 - 39.
- [12] Levy E C. Complex-curve fitting[J]. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1959(4): 37 - 44.
- [13] 张启人. 大系统模型降阶理论[J]. *信息与控制*, 1980, 32(4): 2 - 25.  
Zhang Q R. Model reduction theory for a large scale system[J]. *Information and Control*, 1980, 32(4): 2 - 25.
- [14] 董雯彬. 分数阶线性时不变系统的降阶算法研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2010.  
Dong W B. Research into the reduction algorithm for linear time invariant fractional order dynamic system[D]. Shenyang: Northeastern University, 2010.
- [15] 李文,赵慧敏. 一种分数阶微积分算子的有理函数逼近方法[J]. *自动化学报*, 2011, 37(8): 999 - 1005.  
Li W, Zhao H M. Rational function approximation for fractional order differential and integral operators[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(8): 999 - 1005.
- [16] Santouh Z, Charef A, Assabaa M. Approximation of multiple fractional order systems[J]. *Arab Research Institution Science Engineering*, 2007, 3(4): 155 - 161.

(下转第710页)



- Telecommunications, 2010, 33(1): 7–11.
- [11] Legend W E, Taqqu M S. On the self-similar nature of Ethernet traffic[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 1994, 2(1): 1–15.
- [12] Qian B, Rasheed K. Hurst exponent and financial market predictability[C]//Proceedings of the Second IASTED International Conference on Financial Engineering and Applications. 2004: 203–209.
- [13] Huang G B, Zhu Q Y, Siew C K. Extreme learning machine: Theory and applications[J]. Neurocomputing, 2006, 70(1/2/3): 489–501.
- [14] 武峰雨, 乐秀璠, 南东亮. 相空间重构的极端学习机短期风速预测模型[J]. 电力系统及其自动化学报, 2013, 25(1): 136–141.  
Wu F Y, Le X F, Nan D L. A short-term wind speed prediction model using phase-space reconstructed extreme learning machine[J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2013, 25(1): 136–141.
- [15] Wang D D, Wang R, Yan H. Fast prediction of protein-protein interaction sites based on extreme learning machines[J]. Neurocomputing, 2014, 128(27): 258–266.
- [16] Zhang Z Z, Jia Y M, Zhao W H, et al. Prediction of short-term power output of wind farms based on extreme learning machine[M]//Unifying Electrical Engineering and Electronics Engineering. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2014: 1029–1035.
- [17] 郑莉, 段冬梅, 陆凤彬, 等. 我国猪肉消费需求集成预测——基于 ARIMA、VAR 和 VEC 模型的实证[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(4): 918–925.  
Zheng L, Duan D M, Lu F B, et al. Integration forecast of Chinese pork consumption demand – Empirical based on ARIMA、VAR and VEC models[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2013, 33(4): 918–925.

## 作者简介

田中大(1978–), 男, 博士, 讲师. 研究领域为混沌时间序列预测与分析, 网络控制系统时延补偿方法等.

李树江(1966–), 男, 博士, 教授. 研究领域为中央空调系统的节能与优化控制, 复杂工业过程建模与控制等.

王艳红(1967–), 女, 博士, 教授. 研究领域为先进制造系统控制与优化.

(上接第 704 页)

- [17] Sun H, Onaral B. A unified approach to represent metal electrode polarization[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1983, 30(7): 399–406.
- [18] Li M, Lim S C, Chen S Y. Exact solution of impulse response to a class of fractional oscillators and its stability[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2011, 2011: ID 657839.
- [19] Achar B N N, Hanneken J W, Enck T, et al. Dynamics of the fractional oscillator[J]. Physica A, 2001, 297(3/4): 361–367.
- [20] Achar B N N, Hanneken J W, Clarke T. Damping characteristics of a fractional oscillator[J]. Physica A, 2004, 339(3/4): 311–319.
- [21] Li M, Lim S C, Cattani C, et al. Characteristic roots of a class of fractional oscillators[J]. Advances in High Energy Physics, 2013, 2013: ID 853925.

## 作者简介

左 信(1964–), 男, 教授, 博士生导师. 研究领域为先进控制理论与应用, 安全保护控制系统.

庄 馨(1988–), 女, 硕士生. 研究领域为分数阶系统的控制与应用.

许 璠(1983–), 女, 博士, 副教授. 研究领域为非线性系统辨识, 预测控制.