

线性离散控制系统的频域分析与控制

乔勇, 楼旭阳

江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61473136)

通信作者: 楼旭阳, Louxy@jiangnan.edu.cn 收稿/录用/修回: 2014-10-14/2014-12-05/2015-03-30

摘要

针对多变量离散控制系统的控制设计问题, 提出了一种设计数字 PID (proportional-integral-derivative) 控制器的新方法. 通过 Kalman-Yakubovic-Popov (KYP) 引理, 对离散系统 z 域按系统频率和采样周期的乘积范围进行划分; 然后基于模型匹配原则将 PID 控制器设计转化为求相应区域内 H_∞ 范数构成的不等式最优解问题. 同时将此不等式用系统状态空间中各系数矩阵表示, 利用解线性矩阵不等式的方法进行求解; 最后, 通过数值例子验证, 该方法可提高系统对频率和采样周期取值的鲁棒性, 从而使所设计的控制器有更大的适用范围.

关键词

离散控制系统
频域
模型匹配
 H_∞ 范数
中图分类号: TP13
文献标识码: A

Frequency-domain Analysis and Control of Linear Discrete-time System

QIAO Yong, LOU Xuyang

Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China

Abstract

In this paper, we present a new method for designing digital proportional-integral-derivative (PID) controllers for controller design problems in multivariable discrete-time control systems. Using the Kalman-Yakubovic-Popov (KYP) lemma, we divide the domain of the discrete system by the product scopes of the system frequency and sampling period. Then, based on the principle of approximate model matching, we convert the PID controller design problem to solve the optimization problem of the inequalities formed by the norm in the restricted areas. In addition, we solve the inequalities described in the form of coefficient matrices in the state space realization using linear matrix inequalities. Lastly, we provide a numerical example to illustrate that the proposed method enhances the robustness of the frequency and sample period values, and thus broadens the application scope of designed controller.

Keywords

discrete-time control system;
frequency-domain;
approximate model matching;
 H_∞ norm

1 引言

经典控制理论在一定程度上能较方便地处理单变量控制系统的相关问题, 但它所提供的方法有明显的凑试性, 仅限于系统存在微小摄动的不确定性情况. 状态空间方法能较好地解决多变量控制系统的分析和综合问题^[1-7], 改善得到的 LQG (linear quadratic Gaussian) 状态反馈线性控制系统具有很好的稳定裕度. 然而以上两种方法对被控对象摄动的鲁棒性不够理想^[8]. Zames^[9] 首次提出了利用控制系统内某些信号间的传递函数的 H_∞ 范数作为优化指标的设计思想. 随后, Doyle 等^[10] 提出直接状态空间法, 这是 H_∞ 控制理论的最大突破, 他们将标准 H_∞ 控制问题归结为两个代数 Riccati 方程的求解问题.

Iwasaki 等^[11-12] 把 H_∞ 控制问题的求解进一步归结为线性矩阵不等式的求解, 提出了广义 KYP (GKYP) 引理, 从而将 H_∞ 控制问题转化为一个凸优化问题来处理. 在传统的 z 域法和状态空间法的基础上, Hara 等^[13] 根据所设计的连续 PID 控制器的传递函数离散化得到了数字 PID 控制器, 尽管得到的闭环控制系统能在采样时间取得较小时达到预期的性能指标, 但随着采样时间的进一步减小, 系统的所有极点向 z 平面稳定边界移动, 反之随着采样时间的增大, 阶跃响应的性能变差, 甚至会出现系统振荡及不稳定的现象. Mochizuki 等^[14] 针对板球系统利用 GKYP 引理提出了一种 PID 控制器设计方法. 文^[15] 提出了线性参数变化系统的一种新型控制器设计方法, 基于 GKYP 引理设计了线性参数变化系统的降阶控制器, 且干扰输入的谱

信息可以由一个矩阵值积分二次约束表征. 最近, 文[16]简要综述了 KYP 引理和 GKYP 引理的进展及应用. 然而, 上述研究主要集中在连续系统的时域分析和控制器设计, 且缺乏对系统鲁棒性分析, 具有一定的局限性.

本文将 GKYP 引理应用于线性离散控制系统, 根据系统频率和采样周期的乘积范围划分离散系统的 z 域, 并利用模型匹配原则^[17]将 PID 控制器的设计问题转化为求解相应区域内 H_∞ 范数构成不等式的最优解问题. 然后, 将此不等式的求解问题转化为控制器和被控对象状态空间表达式各系数所组成线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)^[18]的求解问题. 这种方法综合考虑了频率与采样周期的取值, 使控制系统提高了对频率和采样周期取值的鲁棒性, 使设计的数字 PID 控制器有更大的适用范围, 在满足系统性能要求及确保系统稳定性的同时, 使采样周期的取值范围变宽.

2 预备知识

2.1 近似模型匹配

图 1 所示为离散控制系统.

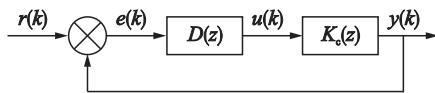


图 1 离散控制系统结构图

Fig.1 Configuration chart of discrete-time control system

图 1 中, $D(z)$ 表示数字 PID 控制器; $K_c(z)$ 表示被控对象进行 z 变换后的传递函数. 根据模型匹配原则, 先选择一个参考模型, 其开环传递函数记作 $K_e(z)$. 这样就可以通过解以下不等式来完成对 $D(z)$ 的设计:

$$\|D(z)K_c(z) - K_e(z)\|_\infty < \varepsilon \quad (1)$$

其中, ε 是给定的正实数. ε 取值越小, 模型匹配的效果越好^[19].

2.2 GKYP 引理

对于矩阵 M , 其转置矩阵及共轭转置矩阵分别记作 M^T 和 M^* . M 是 Hermitian 矩阵, 即满足 $M = M^*$. 对于矩阵 Φ 和 P , 它们的张量积记作 $\Phi \otimes P$.

引理 1^[12] 给定复矩阵 $A, B, \Pi = \Pi^*$ 和 $(\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) \in \Omega$, 其中 $\Omega := \left\{ (\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \text{ 使得 } \hat{\Phi} = M^* \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} M, \alpha \cdot \det(M) \neq 0, \hat{\Psi} = M^* \begin{bmatrix} -1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix} M \right\}$.

定义 $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \sigma(\lambda, \hat{\Phi}) = 0, \sigma(\lambda, \hat{\Psi}) \geq 0\}$, 假设 (A, B) 是可控的, 且 A 不含特征值 λ 使得 $\sigma(\lambda, \hat{\Phi}) = 0$ 成立. 那么以下陈述是等价的:

- 1) 对于 A 的所有特征值 $\lambda \in \Lambda$ 下述不等式成立

$$\begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2)$$

- 2) 存在 Hermitian 矩阵 P 和 Q , 满足 $Q > 0$, 且

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* L(P, Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Pi \leq 0 \quad (3)$$

$$L(P, Q) := \hat{\Phi} \otimes P + \hat{\Psi} \otimes Q$$

2.3 离散系统的状态空间表达式

一个线性连续时间系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4)$$

对其进行离散化处理, 取采样周期为 T , 采样时间表示为 kT ($k=0, 1, 2, \dots$). 设控制输入 $u(t)$ 只在采样时刻发生变化, 在相邻两采样时刻之间, $u(t)$ 是通过零阶保持器保持不变的, 且等于前一采样时间之值, 即在 kT 和 $(k+1)T$ 之间, $u(t) = u(kT) = \text{常数}$, 则式(4)离散化得到的状态空间表达式为

$$x(k+1) = G(T)x(k) + H(T)u(k) \quad (5)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (6)$$

其中,

$$G(T) = e^{AT} \quad (7)$$

$$H(T) = \int_0^T e^{At} dt \cdot B \quad (8)$$

3 主要结果

根据文[12]中按频域对 Ψ 进行划分的方法及 $z = e^{sT} = e^{j\omega T}$ 的转换关系, 可得表 1.

表 1 Θ 与 Ψ 的对应关系
Tab.1 Relationship between Θ and Ψ

Θ	Ψ
$ \theta \leq \tilde{\vartheta}_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\cos \tilde{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$
$0 \leq \theta \leq \tilde{\vartheta}_1$	$\begin{bmatrix} 0 & -e^{j\frac{\tilde{\vartheta}_1}{2}} \\ -e^{-j\frac{\tilde{\vartheta}_1}{2}} & 2\cos \frac{\tilde{\vartheta}_1}{2} \end{bmatrix}$
$\tilde{\vartheta}_1 \leq \theta \leq \tilde{\vartheta}_h$	$\begin{bmatrix} 0 & e^{j\frac{\tilde{\vartheta}_1 + \tilde{\vartheta}_h}{2}} \\ e^{-j\frac{\tilde{\vartheta}_1 + \tilde{\vartheta}_h}{2}} & -2\cos \frac{\tilde{\vartheta}_h - \tilde{\vartheta}_1}{2} \end{bmatrix}$
$\tilde{\vartheta}_h \leq \theta $	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\cos \tilde{\vartheta}_h \end{bmatrix}$
$\tilde{\vartheta}_h \leq \theta$	$\begin{bmatrix} 0 & je^{j\frac{\tilde{\vartheta}_h}{2}} \\ -je^{-j\frac{\tilde{\vartheta}_h}{2}} & -2\sin \frac{\tilde{\vartheta}_h}{2} \end{bmatrix}$

为便于讨论, 将 Θ 表示为

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \quad (9)$$

其中, $|\theta| = |\omega T| \leq \pi$, Hermitian 矩阵 $\Psi \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. 在线性定常离散时间控制系统中, 初始状态通常取 0, 即 $x(k)|_{k=0} = 0$. 将式(5)进行 z 变换可得 $zx(z) = Gx(z) + Hu(z)$, 在满足 $\det(zI - G) \neq 0$ 时, 整理可得

$$x(z) = (zI - G)^{-1}Hu(z) \quad (10)$$

同理, 由式(6)可得

$$y(z) = Cx(z) + Du(z) \quad (11)$$

进而可得

$$K(z) = y(z)/u(z) = C(zI - G)^{-1}H + D \quad (12)$$

推论 1 给定 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (G 和 H 可由连续

系统中 A 和 B 唯一确定) 以及 Hermitian 矩阵 $\Pi \in C^{(n+m) \times (n+m)}$, 设 $K(e^{j\theta}) = (e^{j\theta}I - G)^{-1}H$, 当 $\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0$ ($\forall \theta \in \Theta$) 时, 下列条件等价:

1) $\forall \theta \in \Theta$,

$$\begin{bmatrix} (e^{j\theta}I - G)^{-1}H \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} (e^{j\theta}I - G)^{-1}H \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

2) 存在 Hermitian 矩阵 P 和 Q , 满足 $Q > 0$, 且

$$\begin{bmatrix} G & H \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} + \Psi \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & H \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Pi < 0 \quad (14)$$

证明 令 $e^{j\theta} = \lambda$, 则有 $e^{j\theta}e^{-j\theta} - 1 = 0$, 其等价的矩阵形式为 $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

根据引理 1 可得 $\Phi_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 又由 $\theta \in \Theta$, 可知 $\lambda \in$

A . 进而, 根据实矩阵的转置与共轭转置等价的事实, 可得此推论成立.

推论 2 给定 $G \in R^{n \times n}$ 和 $H \in R^{n \times m}$ (G 和 H 可由连续系统中 A 和 B 唯一确定) 以及 Hermitian 矩阵 $\Pi \in C^{(n+m) \times (n+m)}$, 设 $K(e^{j\theta}) = (e^{j\theta}I - G)^{-1}$, 则当 $\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0$ ($\forall \theta \in \Theta$) 时, 下列条件等价:

1) $\forall \theta \in \Theta$,

$$[C(e^{j\theta}I - G)^{-1} \ I] \Pi [C(e^{j\theta}I - G)^{-1} \ I]^* < 0 \quad (15)$$

2) 存在 Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$, 且

$$\begin{bmatrix} G & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} + \Psi^T \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & I \\ C & 0 \end{bmatrix} + \Pi < 0 \quad (16)$$

证明 因为 $\begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}$ 为标量, 所以有

$$\begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

展开可得

$$\begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} e^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & 1 \end{bmatrix} \Psi^T \begin{bmatrix} e^{-j\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi^T \begin{bmatrix} e^{-j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令 $\bar{\theta} = \omega T = -\omega T = -\theta$, 则

$$\bar{\Theta} = \left\{ \bar{\theta} \in R: \begin{bmatrix} e^{j\bar{\theta}} \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi^T \begin{bmatrix} e^{j\bar{\theta}} \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

于是有不等式

$$\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0 \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

与

$$\det(e^{j\bar{\theta}}I - G) \neq 0 \quad (\forall \bar{\theta} \in \bar{\Theta})$$

等价, 则推论 2 中结论 1) 可等价于

$$\forall \bar{\theta} \in \bar{\Theta}, [K(e^{-j\bar{\theta}}) \ I] \Pi [K(e^{-j\bar{\theta}}) \ I]^* < 0$$

此式又等价于

$$\begin{bmatrix} K^*(e^{-j\bar{\theta}}) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} K^*(e^{-j\bar{\theta}}) \\ I \end{bmatrix} < 0$$

其中, $K^*(e^{-j\bar{\theta}}) = (e^{j\bar{\theta}}I - G^T)^{-1}C^T$. 根据推论 1, 推论 2 中 1) 成立的等价条件为: 存在 Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$, 使得式(16)成立, 所以结论 2) 成立. 证毕.

由推论 1 可得以下定理:

定理 1 当 $\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0$ ($\forall \theta \in \Theta$) 时, 不等式

$\|K(z)\|_{\infty}^2 = \|C(zI - G)^{-1}H + D\|_{\infty}^2 < \varepsilon$ 成立的充要条件是存在 Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} G & H \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} + \Psi \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & H \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - \varepsilon^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

成立.

证明 根据 H_{∞} 范数的定义, 可得 $\|K(z)\|_{\infty}^2 < \varepsilon$ 等价于 $\sup_{\theta \in \Theta} \sigma_{\max}(K(e^{j\theta})) < \varepsilon$, 其中 σ_{\max} 为最大奇异值. 根据 $K(z)$ 定义有

$$K^*(e^{j\theta})K(e^{j\theta}) < \varepsilon^2 I, \quad \forall \theta \in \Theta$$

进一步展开得

$$(C(e^{j\theta}I - G)^{-1}H + D)^* (C(e^{j\theta}I - G)^{-1}H + D) - \varepsilon^2 I < 0, \quad \forall \theta \in \Theta$$

将其写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} (e^{j\theta}I - G)^{-1}H \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - \varepsilon^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e^{j\theta}I - G)^{-1}H \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (18)$$

取 $\Pi = \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - \varepsilon^2 I \end{bmatrix}$, 根据推论 1, 当 $\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0$ ($\forall \theta \in \Theta$) 时, 式(18)成立的充要条件是存在 Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$ 使得式(17)成立, 即此定理成立. 证毕.

定理 1 的对偶形式如定理 2 所示, 定理 2 的形式在实际问题中应用范围更为广泛.

定理 2 当 $\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0$ ($\forall \theta \in \Theta$) 时, 则不等式 $\|K(z)\|_{\infty}^2 = \|C(zI - G)^{-1}H + D\|_{\infty}^2 < \varepsilon$ 成立的充要条件是存在 Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$ 使得下述不等式成立:

$$\begin{bmatrix} G & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} + \Psi^T \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & I \\ C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} HH^T & HD^T \\ DH^T & DD^T - \varepsilon^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

证明 类似于定理 1 的证明, 根据无穷范数及奇异值的定义可得

$$(H^T(e^{-j\theta}I - G^T)^{-1}C^T + D^T)^* (H^T(e^{-j\theta}I - G^T)^{-1}C^T + D^T) - \varepsilon^2 I < 0, \quad \forall \theta \in \Theta$$

再结合推论 2 可得

$$(H^T(e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T + D^T)^* (H^T(e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T + D^T) - \varepsilon^2 I < 0, \quad \forall \theta \in \bar{\Theta}$$

进一步展开得

$$\begin{aligned} & ((e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T)^* HH^T ((e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T) + \\ & ((e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T)^* HD^T + DH^T ((e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T) + \\ & DD^T - \varepsilon^2 I < 0, \quad \forall \theta \in \bar{\Theta} \end{aligned}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} (e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T \\ I \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} HH^T & HD^T \\ DH^T & DD^T - \varepsilon^2 I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (e^{j\theta}I - G^T)^{-1}C^T \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad \theta \in \bar{\Theta}$$

证毕.

定理 3 当 $\det(e^{j\theta}I - G) \neq 0$ ($\forall \theta \in \Theta$) 时, 则不等式 $\|K(z)\|_{\infty}^2 = \|C(zI - G)^{-1}H\|_{\infty}^2 < \varepsilon$ 成立的充要条件是存在

Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$ 使得下述不等式成立:

$$\begin{bmatrix} N & \begin{bmatrix} H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

其中,

$$N = \begin{bmatrix} G & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} + \Psi^T \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\varepsilon^2 I \end{bmatrix}$$

证明 由定理 2 知, 当 $D = 0$ 时, 不等式

$$\|C(zI - G)^{-1}H\|_{\infty}^2 < \varepsilon$$

成立的充要条件是存在 Hermitian 矩阵 P 和 $Q > 0$ 使得下述不等式成立:

$$\begin{bmatrix} G & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} + \Psi^T \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} HH^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\varepsilon^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.05 \times 10^7 & -2.47 \times 10^7 & -9.72 \times 10^6 & -1.29 \times 10^4 & -2 \ 369 \end{bmatrix}$$

$$C_c = 440 [1.98 \times 10^6 \ 3 \ 148 \ 4 \ 209 \ 1.5 \ 1 \ 0]$$

$$B_c = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, D_c = 0$$

由式 (12) 可得 $K_c(z) = C_c(zI - G_c)^{-1}H_c + D_c$, 其中 G_c 和 H_c 可由 A_c 和 B_c 求得.

我们的目的是设计数字 PID 控制器使得在单位阶跃输入下, 输出响应没有静态误差; 且使最终串联上控制器的系统的超调量不大于 30%, 上升时间 t_r 不大于 0.5 s, 调节时间 t_s 不大于 1 s; 系统频率变化及采样时间变大或变小时, 系统具有一定鲁棒性, 能保持其输出性能并且稳定.

在 s 域内 PID 控制器的传递函数可表示为

$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{T_D s + 1} = C_D (sI - A_D)^{-1} B_D + D_D$$

则其状态空间表达式系数矩阵为

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_D} \end{bmatrix}, B_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_D = \begin{bmatrix} \frac{K_i}{T_D} & K_i - \frac{K_D}{T_D} \end{bmatrix}, D_D = K_p + \frac{K_D}{T_D}$$

则 z 域内的 PID 控制器可表示为

$$D(z) = C_D (zI - G_D)^{-1} H_D + D_D$$

其中, G_D 和 H_D 可由 A_D 和 B_D 计算得到.

根据系统性能指标的设计要求得到参考模型的传递函数为

$$K_e(s) = 17 \ 359 \frac{(s+7)(s+0.3)(s^2+0.7s+540)(s^2+0.7s+3 \ 670)}{s^2(s+1 \ 000)(s+2)(s^2+2s+1 \ 300)(s^2+s+4 \ 100)}$$

将其转化为状态空间表达式的形式, 可以得到相应矩阵 A_e, B_e, C_e , 进而可得对应离散系统矩阵 G_e 和 H_e 并求出 $K_e(z)$.

此式也可表示为

$$\begin{bmatrix} G & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} + \Psi^T \otimes Q \right) \begin{bmatrix} G & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\varepsilon^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} H^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} < 0$$

因此, 结合 Schur 补引理, 便可得式 (20), 证毕.

4 数值仿真

例 考虑连续线性控制系统被控对象:

$$K_c(s) = 440 \frac{(s^2 + 0.75s + 540)(s^2 + 0.75s + 3 \ 666)}{(s^2 + 2s)(s^2 + 2.4s + 1 \ 276)(s^2 + 1.2s + 4 \ 100)}$$

将传递函数 $K_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c$ 转化为状态空间形式可得

记 $K(z) = D(z)K_c(z) - K_e(z) = C(zI - G)^{-1}H$, 经推导得到 G 和 H 可表示如下:

$$G = \begin{bmatrix} G_c & G_c C_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_e \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_c D_D \\ H_D \\ H_e \end{bmatrix}$$

$$C = [C_c \ \mathbf{0} \ -C_e]$$

从而, 可将不同频率及采样时间对应下的离散控制系统的 PID 控制器优化设计的问题转化为通过 $\|K(z)\|_{\infty}^2 < \varepsilon$ 计算状态空间表达式各项系数矩阵中不同参数的问题.

对于被控对象 $K_c(s)$, 其单位负反馈系统的阶跃响应曲线如图 2 所示.

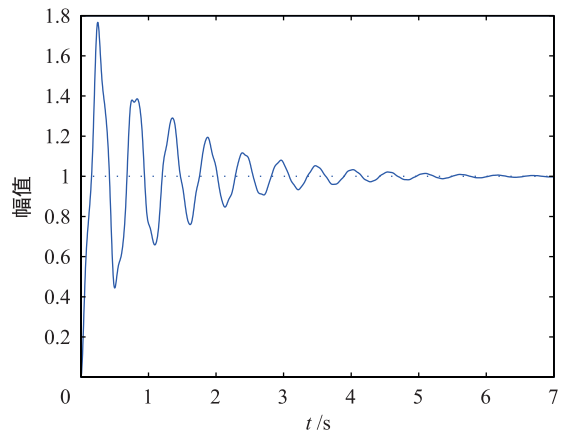


图 2 原闭环系统阶跃响应曲线

Fig.2 Step response curve of the original closed loop system

Iwasaki 等^[12-13]提出的 z 域数字 PID 控制器设计是在计算出 $D(s)$ 的基础上利用 Tustin 差分法将其离散化, 即

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz+1}} \quad (21)$$

基于该方法得出在不同采样时间下的阶跃响应曲线如图 3 所示。

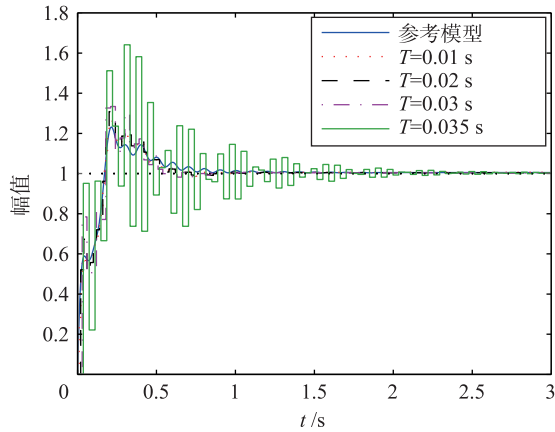


图 3 基于式(21)控制器的阶跃响应曲线

Fig.3 Step response curves based on formula (21) controller

当采样周期 T 较小时, 这种方法还可达到预期的性能指标. 随着采样周期降低, 最小相位系统的离散时间模型会变成具有不稳定零点的非最小相位系统, 且极点向稳定边界移动; 反之, 随着采样周期增大, 由于此方法并没有考虑采样时间与原连续系统频率间的关系, 即没有考虑其乘积所在的区间. 因此, 阶跃响应的性能变差, 甚至会出现系统振荡及不稳定的现象。

在给定误差限 $\varepsilon = \sqrt{0.05}$ 及 $T_D = 0.001$ s 后, 根据本实例所研究系统的频率取值及采样时间的取值范围, 按表 1 中格式可把角度划分为 $0 \leq \theta \leq 0.2$, $\theta \geq 0.2$ 和 $|\theta| \geq 1.5$ 这 3 种情况, 再应用本文方法设计 PID 控制器, 只需将上述推导及数据代入定理 3 中不等式 (20), 进一步根据求得的

矩阵 G 和 H 可得控制器参数为: $K_p = 0.31$, $K_i = 0.1$, $K_D = 0.04$. 该控制器的设计方法综合考虑了 ω , T , ωT 的取值, 这样使 θ 落在更为合适的区间, 从而使得 Ψ 的取值更符合实际情况的需求. 只要选取合适的参考模型, 就可提高控制系统性能, 即提高控制系统对频率及采样时间的鲁棒性. 利用所设计的控制器作用于系统进行仿真, 获得阶跃响应曲线如图 4 所示. 由图 4 可知, 随着采样时间的增加, 系统依然保持了良好性能, 并未出现振荡及不稳定现象。

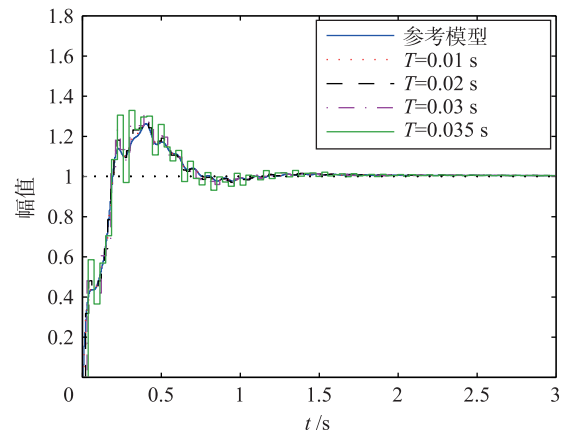


图 4 基于模型匹配 PID 控制器的阶跃响应曲线

Fig.4 Step response curves based on approximate model matching PID controller

5 结论

本文提出利用系统频率和采样周期划分 z 域来改进数字 PID 控制器的设计方法, 结合 GKYP 引理、 H_∞ 范数和模型匹配原则, 提出了频域下控制器设计和解线性矩阵不等式之间的等价关系. 该方法减小了采样周期对系统性能的影响, 从而提高了控制系统的鲁棒性, 所设计的数字 PID 控制器也具有更广的应用范围。

参考文献

- [1] 李大宇, 焦军胜, 靳其兵. 基于对角关联矩阵的广义多变量控制系统性能评价[J]. 信息与控制, 2013, 42(2): 157-161.
Li D Y, Jiao J S, Jin Q B. Performance assessment of generalized multivariable control systems based on diagonal interactors[J]. Information and Control, 2013, 42(2): 157-161.
- [2] Al-Hadithi B M, Jiménez A, López R G. Fuzzy optimal control using generalized Takagi-Sugeno model for multivariable nonlinear systems[J]. Applied Soft Computing, 2015, 30: 205-213.
- [3] Zhang R D, Gao F R. An improved decoupling structure based state space MPC design with improved performance[J]. Systems & Control Letters, 2015, 75: 77-83.
- [4] Paduart J, Schoukens J, Pintelon R. Nonlinear state space modelling of multivariable systems[C]//2005 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2005), Bruges, Belgium, 2005: 614-617.
- [5] Mercère G, Bako L. Parameterization and identification of multivariable state-space systems: A canonical approach[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1547-1555.
- [6] 乔俊飞, 王莉莉, 韩红桂. 基于 ESN 的污水处理多变量自适应预测控制[J]. 信息与控制, 2014, 43(3): 368-373, 380.
Qiao J F, Wang L L, Han H G. Multivariable adaptive predictive control for wastewater treatment process based on ESN[J]. Information and Control, 2014, 43(3): 368-373, 380.
- [7] 郭伟, 王汉杰, 夏友亮, 等. 基于状态空间方程的多变量 PID-MAC 在锅炉燃烧控制系统中的应用[J]. 热力发电, 2014, 43(9): 48-53, 59.
Guo W, Wang H J, Xia Y L, et al. Application of state space equation based multivariable PID-MAC in boiler combustion control system[J].

- Thermal Power Generation, 2014, 43(9): 48–53, 59.
- [8] 褚健, 俞立, 苏宏业. 鲁棒控制理论及应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2000.
Chu J, Yu L, Su H Y. The theory and application of robust control[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2000.
- [9] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximation inverses [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(2): 301–320.
- [10] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(8): 831–847.
- [11] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma; Unified frequency domain inequalities with design applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(1): 41–59.
- [12] Iwasaki T, Hara S. Generalization of Kalman-Yakubovich-Popov lemma for restricted frequency inequalities[C]//Proceedings of the 2003 American Control Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2003: 3828–3833.
- [13] Hara S, Iwasaki T, Shiokata D. Robust PID control using generalized KYP synthesis; Direct open-loop shaping in multiple frequency ranges [J]. IEEE Control Systems, 2006, 26(1): 80–91.
- [14] Mochizuki S, Ichihara H. Generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma based I-PD controller design for ball and plate system[J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 854631, 1–9.
- [15] Sun G H, Ge D M, Wang S J. Induced L_2 norm control for LPV system with specified class of disturbance inputs[J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(2): 331–346.
- [16] Iwasaki T. Generalized KYP lemma and applications[J]. Encyclopedia of Systems and Control, 2014, 1–7.
- [17] Dehghani A, Lanzon A, Anderson B D O. A two-degree-of-freedom H_∞ control design method for robust model matching[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2006, 16(10): 467–483.
- [18] 惠俊军, 张合新, 周鑫, 等. 含非线性扰动的区间变时滞系统鲁棒稳定新判据[J]. 信息与控制, 2014, 43(5): 529–533.
Hui J J, Zhang H X, Zhou X, et al. New robust stability criteria for interval time-varying delay systems with nonlinear perturbations[J]. Information and Control, 2014, 43(5): 529–533.
- [19] Dehghani A, Lanzon A, Anderson B D O. An H_∞ model referencing design utilizing a two degree of freedom controller scheme [C]//The 44th IEEE Conference on Decision and Control and 2005 European Control Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005: 2302–2307.

作者简介

乔 勇(1990–), 男, 本科生. 研究领域为线性系统的频域分析.

楼旭阳(1982–), 男, 博士, 副教授. 研究领域为复杂系统的控制理论与应用.