

# 多变量非方系统多环 PI 控制器设计

王志强, 栾小丽, 刘 飞

江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61473137)

通信作者: 栾小丽, xiaoli\_luan@126.com 收稿/录用/修回: 2015-09-24/2015-11-13/2016-01-05

## 摘要

基于等价传递函数(ETF)理论, 提出含有多时滞的高维多变量非方系统多环 PI(preportional-integral)控制器设计方法. 首先, 利用等价传递函数与被控过程传递函数的广义逆之间关系推导出 ETF 的求解通式. 接着, 基于已获得的 ETF, 利用 IMC-PID(internal model control-proportional integral derivation)原理设计控制器, 再利用 Maclaurin 级数展开获得多环 PI 控制器参数. 所提 ETF 算法不仅具有更高的精度且适应于高维非方系统. 最后通过仿真实例验证了所提算法的简单性和有效性.

## 关键词

非方系统  
等价传递函数  
广义逆  
多环 PI(proportional integral)控制  
中图分类号: TP273  
文献标识码: A

# Multi-loop PI Controller Design for Multivariable Non-square Systems

WANG Zhiqiang, LUAN Xiaoli, LIU Fei

Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry, Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China

## Abstract

Based on the theory of equivalent transfer function (ETF), we propose a multi-loop PI (proportional integral) controller design method for high dimensional multivariable non-square systems with time-delays. Firstly, by exploiting the relationship between the ETF and the generalized inverse of transfer function of the non-square systems, an analytical expression of ETF is derived. Then, based on the obtained ETF, the multi-loop PI controller parameters are calculated by exploiting IMC-PID (internal model control-proportional integral derivation) theory with the help of the Maclaurin expansion. The proposed ETF design approach not only has higher accuracy, but is also applicable to high dimensional non-square systems. Finally, several examples are given to demonstrate the simplicity and the effectiveness of the designed method.

## Keywords

non-square system;  
equivalent transfer function;  
generalized inverse;  
decentralized PI (proportional integral) control

## 1 引言

实际工业生产过程中, 存在输入变量与输出变量数目不相等的非方系统<sup>[1-5]</sup>. 针对非方系统, 最简单的处理方法是方形化, 即根据性能需求和系统特性, 将非方系统转化成方形系统<sup>[6-7]</sup>, 再利用方形系统的方法进行设计. 由于系统的部分信息被忽略, 可能引入右半平面极点致使系统不稳定, 因此直接针对非方系统进行控制的策略受到了学者们的推崇<sup>[8]</sup>. 另外, 由于分散控制具有设计过程简单、鲁棒性能好、能被操作者理解等优点, 在非方系统控制理论发展和实际应用中得到广泛研究. 如文[9-12]分别利用非方相对增益矩阵法和块相对增益法进行配对, 先确定主回路, 再针对主回路设计控制器. 但是没有考虑来自不同回路的耦合, 仅通过配对削弱各通道间的耦合, 这样使控制性能有所下降. 为了解决上述问题, 文[13-14]

分别利用非方相对有效增益阵列(NERGA)和非方相对归一化增益阵列(NRNGA)方法, 提出基于等价传递函数(ETF)的控制方案. 但由于近似化方法的使用, 得到的 ETF 模型精度不高, 从而影响了系统的控制性能.

针对上述多变量非方控制系统设计过程中存在的问题, 本文提出时滞高维多变量非方系统多环 PI 控制器设计新方法. 考虑来自不同环路的耦合, 同时利用 ETF 与被控过程传递函数广义逆之间的关系建立方程组, 推导具有更高精度的 ETF 解析通式, 再结合 IMC-PID 控制原理, 设计多环 PI 控制器. 所提控制方法精度高, 适用于高维的多变量非方系统.

## 2 等价传递函数

考虑  $m \times n (m < n)$  的开环稳定多变量非方系统过程, 其闭环分散控制系统结构和等价单输入单输出系统结构

如图 1 所示, 其中  $r_i$ 、 $e_i$ 、 $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 及  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 分别为参考输入、跟踪误差、系统输出及控制输入,  $\hat{g}_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ) 为  $i$ - $j$  回路的等价传递函数 (等价传递函数是指某一回路在其它回路受控闭合后原输入输出之间的开环传递函数),  $g_{c,ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$ ) 为对应回路的控制器,  $\mathbf{G}(s)$  为开环稳定对象的传递函数矩阵:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

根据等价传递函数的性质<sup>[14]</sup>可知, 被控对象的广义逆与等价传递函数存在如下的关系:

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{G}^+(s) \quad (1)$$

其中  $\hat{\mathbf{G}}(s)$ 、 $\mathbf{G}^+(s)$  分别为被控对象  $\mathbf{G}(s)$  的对应的等价传递函数矩阵和广义逆矩阵. 根据文<sup>[15]</sup>可知, 如果  $\mathbf{G}(s)$  为行满秩矩阵, 则它的广义逆为  $\mathbf{G}^+(s) = \mathbf{G}^T(-s)(\mathbf{G}(s)\mathbf{G}^T(-s))^{-1}$ . 利用上述关系, 可以求取被控对象的 ETF 模型.

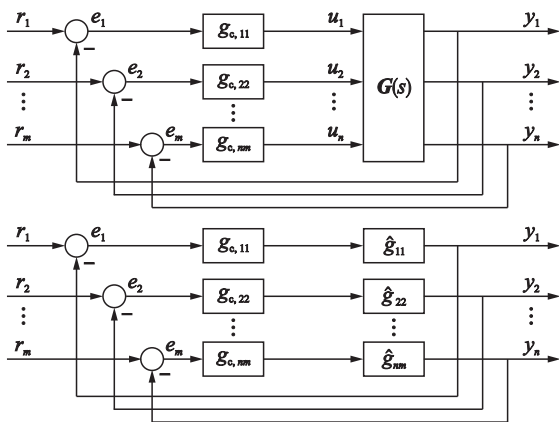


图 1 闭环分散控制系统结构和等价单输入单输出系统结构

Fig.1 Closed-loop decentralized control structure and equivalent single-input-single-output control structure

令:

$$\mathbf{G}^T(-s) = \mathbf{F}(s) \quad (2)$$

通常可用 1 阶纯滞后模型 (FOPDT) 来近似描述实际系统, 即:

$$g_{ij}(s) = \frac{k_{ij}e^{-\theta_{ij}s}}{\tau_{ij}s + 1}, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$$

$$\hat{\tau}_{ji} = \sqrt{\sum_{l=1}^m ((-k_{lj}(\theta_{lj} + \tau_{lj})a_{li} + k_{lj}b_{li})^2 - (k_{lj}(\theta_{lj}^2 + 2\tau_{lj}\theta_{lj} + 2\tau_{lj}^2)a_{li} + 2k_{lj}(\theta_{lj} + \tau_{lj})b_{li} + k_{lj}c_{li}))} \quad (10)$$

$$\hat{\theta}_{ji} = \sum_{l=1}^m (-k_{lj}(\theta_{lj} + \tau_{lj})a_{li} + k_{lj}b_{li}) - \hat{\tau}_{ji} \quad (11)$$

其中,

$$a_{li} = \frac{adj\mathbf{E}_{ij}}{|\mathbf{E}|} \Big|_{s=0}$$

$$b_{li} = -\frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{p=1}^m \left( \sum_{q=1}^m (adj\mathbf{E}_{iq})e'_{qp} \right) adj\mathbf{E}_{pj} \Big|_{s=0}$$

其中,  $k_{ij}$  为对象的稳态增益,  $\tau_{ij}$  为时间常数,  $\theta_{ij}$  为纯滞后时间.

对于  $\hat{\mathbf{G}}(s)$  矩阵中的各个元素, 同样也可采用 FOPDT 模型:

$$\hat{g}_{ij}(s) = \frac{\hat{k}_{ij}e^{-\hat{\theta}_{ij}s}}{\hat{\tau}_{ij}s + 1}, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$$

其中,  $\hat{k}_{ij}$ 、 $\hat{\tau}_{ij}$  和  $\hat{\theta}_{ij}$  为对象考虑耦合后的稳态增益、时间常数和纯滞后时间. 同时, 为后续方便整理, 将  $\mathbf{G}(s)$  和  $\mathbf{F}(s)$  分别简化为  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{F}$ .

针对上述 FOPDT 模型, 根据式 (1) 有:

$$\hat{\mathbf{G}}^T = \mathbf{G}^+ = \mathbf{F}(\mathbf{G}\mathbf{F})^{-1} \quad (3)$$

令:

$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{E} \quad (4)$$

则式 (3) 变为

$$\hat{\mathbf{G}}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}^{-1} \quad (5)$$

即:

$$\frac{\hat{\tau}_{ji}s + 1}{\hat{k}_{ji}} e^{-\hat{\theta}_{ij}s} = \sum_{l=1}^m \left( F_{lj} \frac{adj\mathbf{E}_{ij}}{|\mathbf{E}|} \right) \quad (6)$$

其中  $|\mathbf{E}|$  为  $\mathbf{E}$  的行列式,  $adj\mathbf{E}_{ij}$  为  $\mathbf{E}$  的伴随矩阵.

在式 (6) 两边对  $s$  求 1 阶导数, 有:

$$\frac{\hat{\tau}_{ji}e^{\hat{\theta}_{ij}s} + (\hat{\tau}_{ji}s + 1)\hat{\theta}_{ji}e^{\hat{\theta}_{ij}s}}{\hat{k}_{ji}} = \sum_{l=1}^m \left( F'_{lj} \frac{adj\mathbf{E}_{ij}}{|\mathbf{E}|} - F_{lj} \frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{p=1}^m \left( \sum_{q=1}^m (adj\mathbf{E}_{iq})e'_{qp} \right) adj\mathbf{E}_{pj} \right) \quad (7)$$

其中  $e_{qp}$  为矩阵  $\mathbf{E}$  中的元素,  $e'_{qp}$  为  $e_{qp}$  的 1 阶导数.

继续在式 (7) 两边对  $s$  求 1 阶导数, 有:

$$\frac{2\hat{\tau}_{ji}\hat{\theta}_{ji}e^{\hat{\theta}_{ij}s} + (\hat{\tau}_{ji}s + 1)\hat{\theta}_{ji}^2e^{\hat{\theta}_{ij}s}}{\hat{k}_{ji}} = \sum_{l=1}^m \left[ F''_{lj} \frac{adj\mathbf{E}_{ij}}{|\mathbf{E}|} - 2F'_{lj} \frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{p=1}^m \left( \sum_{q=1}^m (adj\mathbf{E}_{iq})e'_{qp} \right) adj\mathbf{E}_{pj} + F_{lj} \left( \frac{2}{|\mathbf{E}|^3} \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m adj\mathbf{E}_{iq}e'_{qp}adj\mathbf{E}_{pv}e'_{vu}adj\mathbf{E}_{uj} \cdot \frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m adj\mathbf{E}_{iq}e''_{qp}adj\mathbf{E}_{pj} \right) \right] \quad (8)$$

其中  $e''_{qp}$  为  $e_{qp}$  的 2 阶导数. 令式 (6) ~ (8) 中的  $s=0$ , 有:

$$\hat{k}_{ji} = \sum_{l=1}^m \frac{1}{k_{lj}a_{li}} \quad (9)$$

$$c_{li} = \frac{2}{|\mathbf{E}|^3} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m adj\mathbf{E}_{iq}e'_{qp}adj\mathbf{E}_{rv}e'_{vu}adj\mathbf{E}_{sj} \Big|_{s=0} -$$

$$\frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m adj\mathbf{E}_{iq}e''_{qp}adj\mathbf{E}_{pj} \Big|_{s=0}$$

从式 (9) ~ (11) 可以看出, 所求 ETF 模型的关键参数与被控过程参数之间存在直接解析关系, 因此与文<sup>[13-14]</sup>

的 NERGA、NRNGA 等 ETF 近似求法相比, 具有更高的精度. 同时, 式(1)~(11)给出了 ETF 模型参数的通用解, 不依赖于系统的维数, 具有通用性, 可适用于较高维数的多变量非方过程.

### 3 PI 控制器设计

由于等价传递函数已将来自不同回路的耦合考虑进去, 因此针对已获得的等价传递函数可以利用求单输入单输出(SISO)的方法来设计相应的控制器. 本文采用 IMC-PID<sup>[16]</sup>的方法来设计控制器, 因为该方法分析设计过程简单且具有很好的鲁棒性.

将已获得的 ETF 分解成两部分:

$$\hat{g}_{ij} = p_{Ai} p_{Mj} \quad (12)$$

其中  $p_{Ai}$  和  $p_{Mj}$  分别表示非最小相位部分和最小相位部分. 期望的闭环传递函数为

$$\frac{y}{r} = \frac{p_{Ai}}{(\lambda_i s + 1)^{m_i}} \quad (13)$$

其中,  $\lambda_i$  是自主调节参数,  $m_i$  是阶数, 其选择的大小要满足控制器的正则性和可实现性.

根据期望的闭环传递函数可得控制器为

$$g_{c, ij} = \frac{q_i}{(1 - \hat{g}_{ii} q_i)} = \frac{p_{Mj}^{-1}}{(\lambda_i s + 1)^{m_i} - p_{Ai}} \quad (14)$$

其中  $q_i$  是内模控制器, 大小为  $q_i = \frac{p_{Mj}^{-1}}{(\lambda_i s + 1)^{m_i}}$ .

虽然上述控制可物理实现, 但是并不是标准的 PI 形式, 为了得到 PI 的形式, 需要对上述控制器进行 Maclaurin 近似:

$$g_{c, ij} \approx \frac{f_{ij}(s)}{s} = \frac{1}{s} \left( f_{ij}(0) + f_{ij}'(0)s + \frac{f_{ij}''(0)}{2!} + \dots \right) \quad (15)$$

其中,

$$f_{ij}(s) = \frac{s \cdot p_{Mj}^{-1}}{(\lambda_i s + 1)^{m_i} - p_{Ai}} \quad (16)$$

将  $g_{c, ij}$  写成标准的 PI 形式, 即:

$$g_{c, ij} = k_{c, ij} + \frac{k_{i, ij}}{s} \quad (17)$$

其中  $k_{c, ij}$  和  $k_{i, ij}$  分别为控制的比例增益和积分增益.

联立式(15)和式(17)可得控制器的参数为

$$k_{c, ij} = f_{ij}'(0) \quad (18)$$

$$k_{i, ij} = f_{ij}(0) \quad (19)$$

当实际对象存在不确定时, 会影响闭环系统控制性能, 严重时会使系统变得不稳定. 针对实际常见的乘性不确定分析所设计的控制器是否具有良好鲁棒稳定性. 考虑输出不确定性  $\Delta \mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}(s)(I + \Delta_0(s))$ , 其中  $\Delta_0(s)$  为乘性输出不确定性. 根据文[17]可以得到确保闭环控制系统鲁棒稳定性的充分条件为

$$\gamma < \frac{1}{\bar{\sigma}} \left( (I + \mathbf{G}(j\omega) \mathbf{G}_c(j\omega))^{-1} \mathbf{G}(j\omega) \mathbf{G}_c(j\omega) \right) \quad (20)$$

其中  $\gamma$  代表鲁棒稳定程度,  $\bar{\sigma}$  代表最大奇异值,  $\mathbf{G}(j\omega)$ 、 $\mathbf{G}_c(j\omega)$  分别表示为  $\mathbf{G}(s)$  和  $\mathbf{G}_c(s)$  在频域  $s = j\omega$  的表达式. 通过调节式(13)中的  $\lambda_i$  可以改变系统的鲁棒稳定性. 在后

续的仿真验证环节, 为了公平比较系统的响应性能指标, 本文所取  $\gamma$  值大于或者等于用来比较方法的  $\gamma$  值, 即至少在具有相同或更好鲁棒性的基础上比较控制性能的优劣.

同时, 为了比较多变量闭环系统的控制性能, 利用控制系统的平方误差积分 ISE (integral square error) 性能指标<sup>[18]</sup>来进行比较. 其计算公式为

$$S_{\text{ISE}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m S_{y_i - r_i} \quad (21)$$

在式(21)中, 表达式  $S_{y_i - r_i} = \int_0^{\infty} (1 - y_i)^2 dt$ ,  $S_{y_i - r_i} = \int_0^{\infty} (0 - y_i)^2 dt$ ,  $j \neq i$ .

该指标(式(21))达到最小的系统就是某种意义下的最优控制系统.

### 4 仿真实例

例1 以文[13]中  $2 \times 3$  的非方系统为例, 系统传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5e^{-0.2s}}{3s+1} & \frac{0.07e^{-0.3s}}{2.5s+1} & \frac{0.04e^{-0.03s}}{2.8s+1} \\ \frac{0.004e^{-0.4s}}{1.5s+1} & \frac{-0.003e^{-0.2s}}{s+1} & \frac{-0.001e^{-0.4s}}{1.6s+1} \end{bmatrix}$$

由文[11]可知,  $y_1$  与  $u_1$  和  $u_3$  进行配对;  $y_2$  与  $u_2$  进行配对. 根据过程传递函数矩阵, 利用式(9)~(11)可以确定该过程回路的 ETF 模型分别为

$$\hat{g}_{11} = \frac{0.60e^{-0.26s}}{2.96s+1}, \quad \hat{g}_{22} = \frac{-0.004e^{-0.18s}}{1.06s+1}, \quad \hat{g}_{13} = \frac{1.29e^{-0.54s}}{2.57s+1}$$

利用式(13)可得, 期望的闭环传递函数分别为

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{e^{-0.54s}}{\lambda_1 s + 1}, \quad \frac{y_2}{r_2} = \frac{e^{-0.18s}}{\lambda_2 s + 1}$$

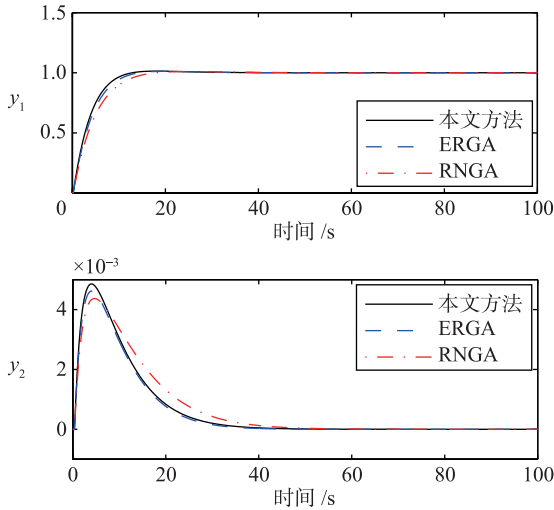
其中  $\lambda_i (i=1, 2)$  为自主调节参数. 通过调节  $\lambda_i$  使本文的  $\gamma$  值大于或等于文[13]和文[14]中的  $\gamma$  值, 这里基于 NERGA 的 ETF 参数化方法<sup>[13]</sup>和基于 NRNGA 的 ETF 参数化方法<sup>[14]</sup>被用来进行仿真比较, 由于 NERGA 方法采用幅值和相角裕度调节控制器参数, 所以不存在  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的值. 根据式(18)和式(19)可得分散结构的 PI 控制器参数, 如表1所示.

表1 控制器参数

Tab.1 Controller parameters

方法	环路	$k_{c, ij}$ $j=1$	$k_{i, ij}$ $j=1$	$k_{c, ij}$ $j=2$	$k_{i, ij}$ $j=2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\gamma$
本文	$i=1$	1.51	0.5	0	0	3	7	0.15
	$i=2$	0	0	-36.98	-35			
	$i=3$	0.26	0.10	0	0			
ERGA	$i=1$	1.4	0.46	0	0	-	-	0.13
	$i=2$	0	0	-37.93	-37.93			
	$i=3$	0.18	0.06	0	0			
RNGA	$i=1$	1.24	0.39	0	0	4	8	0.14
	$i=2$	0	0	-34.15	-30.41			
	$i=3$	0.16	0.09	0	0			

当参考输入  $r_1 = 1, r_2 = 0$  时, 利用表 1 中的控制器信息可以得到图 2(a) 所示的系统输出响应; 当参考输入  $r_1 = 0, r_2 = 1$  时, 可以得到图 2(b) 所示的系统输出响应. 按照 3 种设计方法得到的系统 ISE 性能指标值见表 2. 从图 2 的闭环阶跃响应及表 2 所示的 ISE 性能指标值可见, 本文所提的 ETF 方法具有更好的控制性能.



(a)  $r_1=1, r_2=0$  的系统输出响应

(b)  $r_1=0, r_2=1$  的系统输出响应

图 2 闭环阶跃响应

Fig.2 Closed-loop response to step changes

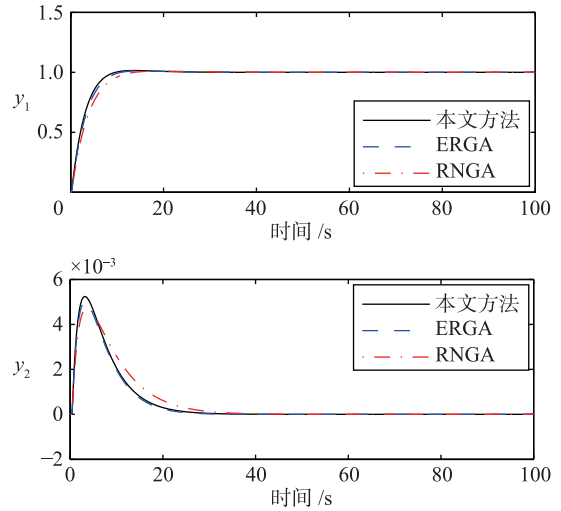
表 2 实例 1 性能指标

Tab.2 Performance indices of example 1

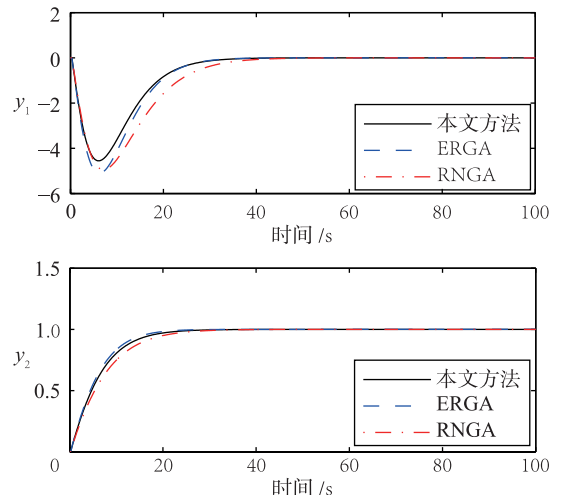
方法	阶跃变化	$S_{y_1-r_i}$ 值	$S_{y_2-r_i}$ 值	$S_{ISE}$
本文	$r_1$	2.026 8	0.000 2	2.027 0
	$r_2$	246.51	4.04	255.55
ERGA	$r_1$	2.199 9	0.000 1	2.200 0
	$r_2$	310.71	4.12	314.83
RNGA	$r_1$	2.512 1	0.000 2	2.512 3
	$r_2$	349.00	5.04	354.04

为了具体说明本文方法的鲁棒性, 分别在被控过程的增

益、时间常数和时滞增加 30% 的扰动. 控制器参数不发生任何变化, 当参考输入  $r_1 = 1, r_2 = 0$  时, 对应的系统输出如图 3(a) ~ 5(a) 所示; 当参考输入  $r_1 = 0, r_2 = 1$  时, 对应的系统输出响应如图 3(b) ~ 5(b) 所示. 当不同参数增加 30% 的扰动时, 按照 3 种设计方法得到的系统 ISE 性能指标值见表 3.



(a)  $r_1=1, r_2=0$  的系统输出响应



(b)  $r_1=0, r_2=1$  的系统输出响应

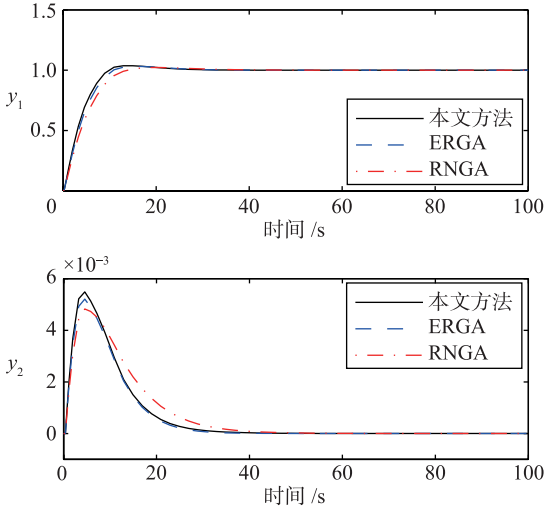
图 3 增益增加 30% 变化时的闭环阶跃响应

Fig.3 Closed-loop responses to step changes for +30% gain perturbation

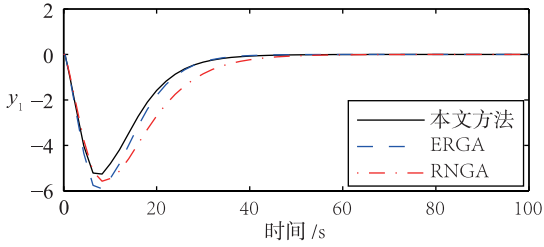
从图 3 ~ 5 和表 3 可以看出, 与文 [13] 和文 [14] 的方法相比, 本文所提的方法具有更好的鲁棒性.

**例 2** 在一些特殊情况下, HVAC (heating, ventilation, and air conditioning) [19] 方形系统的第 4 个被控变量可以不作要求, 此时方形的多变量系统可简化为如下非方系统:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.098e^{-17s}}{122s+1} & \frac{-0.036e^{-27s}}{149s+1} & \frac{-0.014e^{-32s}}{158s+1} & \frac{-0.017e^{-30s}}{155s+1} \\ \frac{-0.043e^{-25s}}{147s+1} & \frac{-0.092e^{-16s}}{130s+1} & \frac{-0.011e^{-33s}}{156s+1} & \frac{-0.012e^{-34s}}{157s+1} \\ \frac{-0.012e^{-31s}}{153s+1} & \frac{-0.016e^{-34s}}{151s+1} & \frac{-0.102e^{-16s}}{118s+1} & \frac{-0.033e^{-26s}}{146s+1} \end{bmatrix}$$



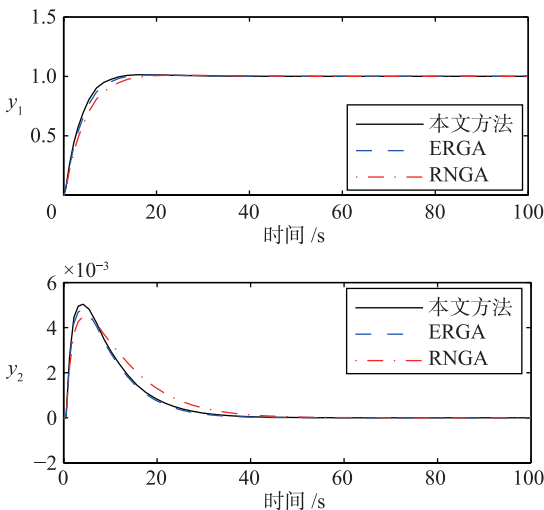
(a)  $r_1=1, r_2=0$  的系统输出响应



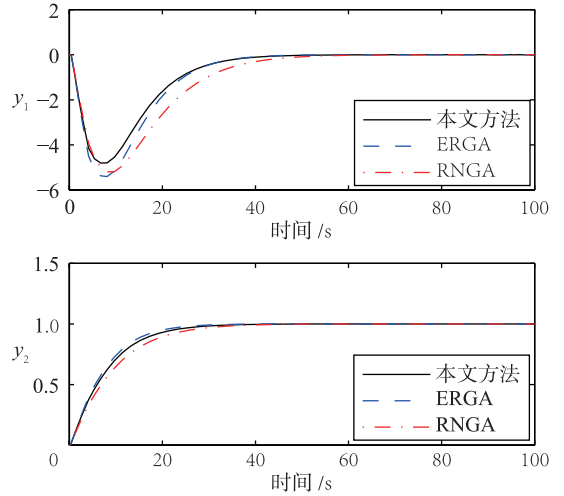
(b)  $r_1=0, r_2=1$  的系统输出响应

图4 时间常数增加30%变化时的闭环阶跃响应

Fig.4 Closed-loop responses to step changes for +30% time constants perturbation



(a)  $r_1=1, r_2=0$  的系统输出响应



(b)  $r_1=0, r_2=1$  的系统输出响应

图5 时滞增加30%变化时的闭环阶跃响应

Fig.5 Closed-loop responses to step changes for +30% time delays perturbation

表3 参数变化时的性能指标

Tab.3 Performance indices of variation on parameters

方法	阶跃变化	$S_{y_1-r_i}$ 值	$S_{y_2-r_i}$ 值	$S_{ISE}$
增益发生+30%的变化量				
本文	$r_1$	1.599 9	0.000 2	1.600 1
	$r_2$	184.66	3.428 1	188.09
ERGA	$r_1$	1.730 4	0.000 2	1.730 6
	$r_2$	232.37	3.2152	235.59
RNGA	$r_1$	1.964 9	0.000 2	1.965 1
	$r_2$	261.66	3.906 4	265.57
时间常数发生+30%的变化量				
本文	$r_1$	2.637 7	0.000 2	2.637 9
	$r_2$	283.15	5.168 5	288.32
ERGA	$r_1$	2.834 5	0.000 2	2.834 7
	$r_2$	356.36	4.878 0	361.24
RNGA	$r_1$	3.179 2	0.000 2	3.179 4
	$r_2$	389.11	5.822 7	394.93
时滞发生+30%的变化量				
本文	$r_1$	2.382 3	0.000 2	2.382 5
	$r_2$	261.90	4.929 2	266.83
ERGA	$r_1$	2.565 6	0.000 2	2.565 8
	$r_2$	330.08	4.637 0	334.72
RNGA	$r_1$	2.893 5	0.000 2	2.893 7
	$r_2$	367.14	5.582 3	372.72

首先利用非方相对增益阵列法<sup>[10]</sup>进行配对： $y_1$ 与 $u_1$ 配对、 $y_2$ 与 $u_2$ 配对、 $y_3$ 与 $u_3$ 和 $u_4$ 配对；再求取该系统主回路的ETF模型：

$$\hat{g}_{11} = \frac{-0.08e^{-19s}}{106s+1}, \quad \hat{g}_{22} = \frac{-0.07e^{-17s}}{115s+1}$$

$$\hat{g}_{33} = \frac{-0.137e^{-20s}}{123s+1}, \quad \hat{g}_{34} = \frac{-0.11e^{-8s}}{128s+1}$$

再根据式(13), 期望闭环传递函数分别为

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{e^{-19s}}{\lambda_1 s + 1}, \quad \frac{y_2}{r_2} = \frac{e^{-17s}}{\lambda_2 s + 1}, \quad \frac{y_3}{r_3} = \frac{e^{-20s}}{\lambda_3 s + 1}$$

其中,  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  为自主调节参数, 根据式(18)和式(19)可得分散结构 PI 控制器参数, 如表 4 所示.

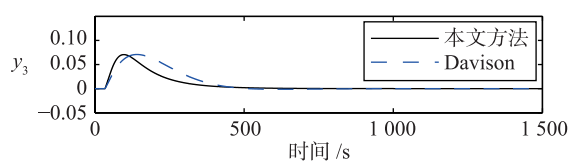
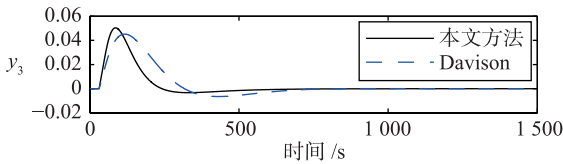
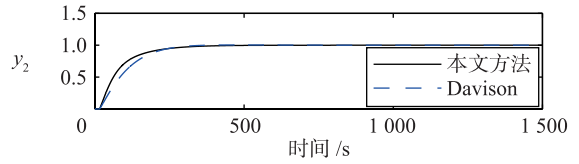
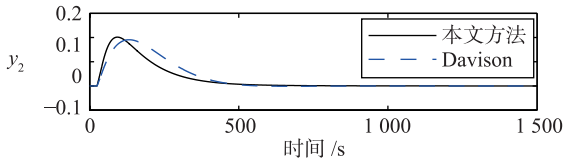
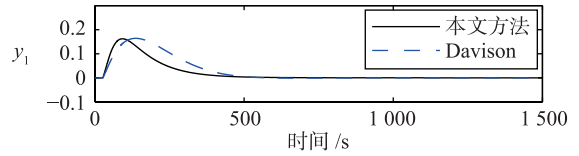
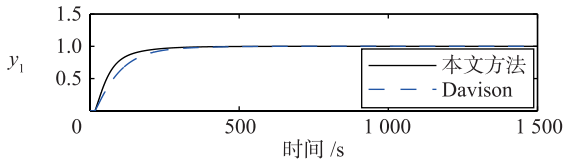
当采用 Davison 方法<sup>[20]</sup>设计控制器时, 不涉及到  $\lambda_i$  值

选取. 当输入  $r_1, r_2, r_3$  分别发生阶跃变化时, 利用表 4 中控制器参数, 可得图 6 所示的闭环系统输出响应. 与之比较的是文[20]中的结果, 按照两种设计方法得到的系统 ISE 性能指标值见表 5. 从图 6 和表 5 可以看出, 无论是针对一般非方系统或高维非方系统, 本文所提的基于 ETF 的 PI 控制方法都可以得到满意的控制效果.

表 4 控制器参数

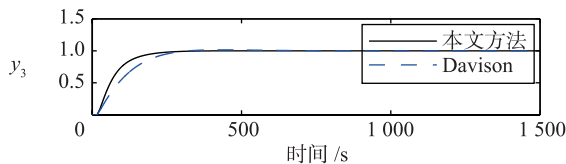
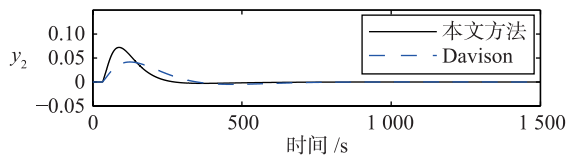
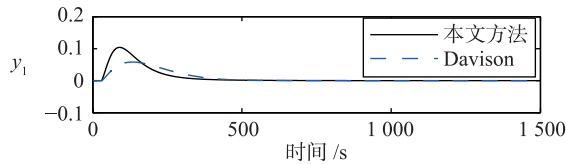
Tab.4 Controller parameters

方法	环路	$k_{c, ij}$ $j=1$	$k_{i, ij}$ $j=1$	$k_{c, ij}$ $j=2$	$k_{i, ij}$ $j=2$	$k_{c, ij}$ $j=3$	$k_{i, ij}$ $j=3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\gamma$
本文	$i=1$	-17	-0.16	0	0	0	0	50	60	60	0.97
	$i=2$	0	0	-17	-0.15	0	0				
	$i=3$	0	0	0	0	-11	-0.06				
	$i=4$	0	0	0	0	-16	-0.09				
Davison	$i=1$	-11.0	-0.12	0	0	0	0	-	-	-	0.97
	$i=2$	0	0	-11	-0.13	0	0				
	$i=3$	0	0	0	0	-8.32	-0.09				
	$i=4$	0	0	0	0	-2.34	-0.03				



(a)  $r_1=1, r_2=0$ 和 $r_3=0$ 的系统输出响应

(b)  $r_1=0, r_2=1$ 和 $r_3=0$ 的系统输出响应



(b)  $r_1=0, r_2=1$ 和 $r_3=0$ 的系统输出响应

图 6 实例 2 的闭环阶跃响应

Fig.6 Closed-loop responses to step changes of example 2

表5 实例2 性能指标  
Tab.5 Performance indices of example 2

方法	阶跃变化	$S_{y_1-r_i}$ 值	$S_{y_2-r_i}$ 值	$S_{y_3-r_i}$ 值	$S_{ISE}$
本文	$r_1$	46.12	4.89	0.18	51.19
	$r_2$	2.91	50.63	0.52	54.06
	$r_3$	0.98	0.40	48.99	50.37
Davison	$r_1$	61.66	6.06	0.25	67.97
	$r_2$	4.53	64.44	0.81	69.78
	$r_3$	0.51	0.23	66.96	67.70

## 5 结论

本文利用等价传递函数与被控过程传递函数的广义逆之间的关系,推导出更高精度的 ETF 模型解析通式,并进一步设计分散结构的 PI 控制器.该方法不仅设计过程简单,具有精度高的优点且适用于高维的多变量非方系统.未来研究将该算法推广到含有扰动的多变量非方系统,将得到的 ETF 作为解耦器,并进一步设计控制器,实现很好的设定值跟踪性能和对扰动抑制作用.

## 参考文献

- [1] Liu J C, Chen N, Xia Y, et al. Modified internal model control for nonsquare systems based on Smith delay compensator control[J]. *Sensors & Transducers*, 2014, 165(2): 96-101.
- [2] Pop C I, De Keyser R, Ionescu C. A simplified control method for multivariable stable nonsquare systems with delays[C]//19th Mediterranean Conference on Control and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 382-387.
- [3] Liu J C, Chen N, Yu X. Modified two-degrees-of-freedom internal model control for non-square systems with multiple time delays[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2014, 21(2): 122-128.
- [4] Rao A S, Chidambaram M. Decoupling Smith predictor for multivariable non-square systems with multiple time delays[J]. *Journal of the Indian Institute of Science*, 2013, 86(3): 235-256.
- [5] Chen J, He Z F, Qi X. A new control method for MIMO first order time delay non-square systems[J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(4): 538-546.
- [6] Ren L H, Luo X L, Liu Y B, et al. A new variable pairing method and Its application in non-square multivariable systems[C]//10th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2012: 2215-2220.
- [7] Luo Y H, Liu H B, Cai W J, et al. Control configuration selection based on RNGA for non-square multivariable processes[C]//Proceedings of 31st Chinese Control Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2012: 4722-4727.
- [8] Chen P L, Ou L L, Gu D Y, et al. Robust analytical scheme for linear non-square systems[C]//Proceedings of the 48th IEEE Conference on. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009: 1890-1895.
- [9] Sarma K L N, Chidambaram M. Centralized PI/PID controllers for nonsquare systems with RHP zeros[J]. *Journal of the Indian Institute of Science*, 2005, 85(4): 201-214.
- [10] Chang J W, Yu C C. The relative gain for non-square multivariable systems[J]. *Chemical engineering science*, 1990, 45(5): 1309-1323.
- [11] Loh E J, Chiu M S. Robust decentralized control of non-square systems[J]. *Chemical Engineering Communications*, 1997, 158(1): 157-180.
- [12] Ammathil R, Narsaiah T B, Rao A S. Design of decentralized Smith predictor for multivariable non-square processes with multiple time delay [J]. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 2014, 21(2): 147-159.
- [13] Chiranjeevi T, Vijetha I V V, Chakravarthi B, et al. Tuning and control of multi-variable systems[J]. *International Journal of electronics and electrical engineering*, 2014, 2(4): 309-320.
- [14] Shen Y L, Sun Y X, Xu W. Centralized PI/PID controller design for multivariable processes[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2014, 53(25): 10439-10447.
- [15] Rao A S, Chidambaram M. Smith delay compensator for multivariable non-square systems with multiple time delays[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2006, 30(8): 1243-1255.
- [16] Lee Y, Park S, Lee M, Brosilow C. PID controller tuning for desired closed-loop responses for SI/SO systems[J]. *AIChE Journal*, 1998, 44(1): 106-115.
- [17] Vu T N L, Lee M. Independent design of multi-loop PI/PID controllers for interacting multivariable processes[J]. *Journal of Process Control*, 2010, 20(8): 922-933.
- [18] Jing Q B, Hao F, Wang Q. A multivariable IMC-PID method for non-square large time delay systems using NPSO algorithm[J]. *Journal of Process Control*, 2014, 23(5): 649-663.
- [19] Shen Y, Cai W J, Li S. Normalized decoupling control for high-dimensional MIMO processes for application in room temperature control HVAC systems[J]. *Control Engineering Practice*, 2010, 18(6): 652-694.
- [20] Davison E J. Multivariable tuning regulators; The feed forward and robust control of a general servomechanism problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(1): 35-47.

## 作者简介

王志强(1987-),男,硕士生.研究领域为多变量非方系统 PI 控制器设计.

栾小丽(1979-),女,博士,副教授.研究领域为复杂系统先进控制与优化.

刘飞(1965-),男,博士,教授.研究领域为先进控制理论与应用,过程监控.