

连续时间马尔可夫跳变系统多频段多指标控制

周超洁, 栾小丽, 刘 飞

江南大学自动化学院轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61473137, 61722306)

通信作者: 栾小丽, xlluan@jiangnan.edu.cn 收稿/录用/修回: 2017-01-23/2017-05-22/2017-07-05

摘要

针对连续时间马尔可夫跳变系统, 基于有限频段理论设计使系统在不同频段下满足不同性能指标的状态反馈控制器. 由于系统在不同模式下具有随机马尔可夫跳变特性, 使得针对确定系统的有限频段问题难以直接应用. 本文将跳变系统各模态进行增广从而得到带有跳变率的增广线性系统. 针对该确定系统, 本文基于广义 KYP(Kalman-Yakubovich-Popov)引理, 在不同频段下设计状态反馈控制器, 使原跳变系统镇定并在不同频段下满足不同的性能指标. 本文所提控制方案为马尔可夫跳变系统等混杂系统的有限频段问题研究提供了新的思路.

关键词

马尔可夫跳变系统

多频段

状态反馈控制

中图法分类号: TP273

文献标识码: A

Multi-frequency and Multi-performance Control for Continuous-time Markov Jump Systems

ZHOU Chaojie, LUAN Xiaoli, LIU Fei

Key Laboratory for Advanced Process Control of Light Industry of the Ministry of Education, Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China

Abstract

Based on the finite-frequency theory, in this study, we designed a state feedback controller for continuous-time Markov jump systems to satisfy their multiple frequency performance requirements. Due to the stochastic Markov jumping among different modes, the finite-frequency specification for deterministic systems cannot be directly used in jump systems. In this paper, by augmenting the modes of Markov jump systems, we transform the original jump systems into augmented deterministic systems with transition probabilities. Then, based on the generalized KYP lemma, we designed a state feedback controller to stabilize the jump systems to enable them to meet the multi-frequency and multi-performance requirements. The proposed methodology provides a new approach to the finite frequency problems of the hybrid generalized KYP lemma.

Keywords

Markov jump system;
multi-frequency;
state feedback control

0 引言

生产实际中, 常常需要考察系统在特定频段的性能指标, 有时甚至需要在不同频段满足不同的性能指标. 因此有限频段问题的研究应运而生^[1-2]. 为解决该问题, 学者们提出了频率加权法^[3-4], 然而由于频率加权函数的复杂度与系统设计指标描述的精确性之间难以平衡, 导致该方法的适用范围受限. 2005年, Iwasaki等人基于 S-procedure的方法提出了广义 KYP引理, 真正打开了有限频段问题研究的大门^[5-7]. 基于广义 KYP引理的有限频段理论研究已经日益体现出巨大优越性和应用潜力, 成为了有限频段问题研究的主流方法.

近年来, 对于广义 KYP引理的有限频段问题研究拓展到了各个领域, 包括开环回路成形^[8], 滤波器设计^[9-10], 车辆悬架系统^[11-13]等方面. 但大多数已有研究都是针对单一模态系统, 对于在电力系统、经济系统以及化工系统中广泛存在的多模态混杂系统^[14-16]却鲜有研究. 虽然文[17]和文[18]考虑了切换系统和马尔可夫跳变系统的有限频段问题, 然而由于仅考虑了各个子系统满足有限频段性能指标, 而忽略了子系统间产生的切换或跳变对于系统整体性能指标的影响.

因此本文针对这一问题, 借鉴文[19]中利用算子理论构造高维空间的思想, 将原跳变系统各模态参数进行增广, 转换为带有跳变率信息的确定系统, 并证明了增广确

定系统的李亚普诺夫稳定性以及有限频段性能指标问题等价于原跳变系统,进一步利用广义 KYP 引理实现原随机跳变系统的多频段多指标控制.与已有方法相比^[20],本文所得结果由于考虑了系统跳变瞬间有限频段性能,而不仅仅是各子系统的有限频段性能,因此具有更小的保守性.仿真实例验证了结果的有效性与优越性.

本文中使用了如下标识: N^T 和 N^* 代表了矩阵 N 的转置和复共轭转置; $N = \text{diag}\{N_1, N_2, \dots, N_s\}$ 表示了矩阵 N 是对角线元素为 N_1, N_2, \dots, N_s 、其余位置元素为0的矩阵;为简化书写,使用 $\text{He}\{N\}$ 来代替 $N + N^*$; \otimes 表示的是 Kronecker 积.

1 问题描述

在给定完备概率空间,考虑连续时间马尔可夫跳变系统:
 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{r}(t))\mathbf{u}(t)$ (1)
 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{r}(t))\mathbf{x}(t)$

其中, $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t))$ 、 $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}(t))$ 、 $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}(t))$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{r}(t))$ 是与模态相关的系数矩阵, $\mathbf{x}(t)$ 是系统的状态向量, $\mathbf{u}(t)$ 是控制向量, $\mathbf{w}(t)$ 是干扰输入, $\mathbf{y}(t)$ 为被控输出, \mathbf{x}_0 、 \mathbf{r}_0 分别代表了系统的初始状态与初始模态.其中, $\mathbf{r}(t)$ 表征了 t 时刻系统所处模态 i , $i \in S$, $S = \{1, 2, \dots, s\}$.为简化书写,系统系数矩阵可简写为: \mathbf{A}_i 、 \mathbf{B}_{1i} 、 \mathbf{B}_{2i} 、 \mathbf{C}_i .系统各模态间的转移概率可表示为

$$P_r\{r_{t+\Delta t} = j | r_t = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & i = j \end{cases}$$

其中, $\Delta t > 0$, $o(\Delta t)$ 为 Δt 的无穷小量,且对于跳变系统的跳变率有:

$$\pi_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^s \pi_{ij} \quad (2)$$

$$\pi_{ij}, i \neq j > 0, \pi_{ii} < 0 \quad (3)$$

本文主要针对系统(1),设计如下状态反馈控制器:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_i\mathbf{x}(t)$$

使得如下闭环系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{1i}\mathbf{w}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)$$

随机稳定,同时满足以下有限频段性能指标:

$$|T_{yw}(j\omega)| < \gamma, \quad \forall |\omega| \leq \omega_l \quad (5)$$

$$|T_{uw}(j\omega)| < \rho, \quad \forall |\omega| \geq \omega_h \quad (6)$$

其中, $\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{2i}\mathbf{K}_i$.

在实现设计目标的过程中,需要使用如下引理:

引理 1 (广义 KYP 引理^[6]) 对于传递函数为 $G(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ 的线性系统,给定对称矩阵 $\mathbf{\Pi}$ 和 $\mathbf{\Xi}$,以下描述是等价的:

1) 有限频段不等式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} \mathbf{G}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0, \quad \omega \in \phi;$$

2) 存在对称矩阵 \mathbf{P} , $\mathbf{Q} > 0$,且

$$N \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi} \end{pmatrix} N^* < 0$$

其中, ϕ 为 ω 所属频段, $N = (\mathbf{M} \ \mathbf{I})\mathbf{T}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$. \mathbf{T} 是置换矩阵,对于任意矩阵 \mathbf{M}_1 、 \mathbf{M}_2 、 \mathbf{M}_3 、 \mathbf{M}_4 有:

$$(\mathbf{M}_1 \ \mathbf{M}_2 \ \mathbf{M}_3 \ \mathbf{M}_4)\mathbf{T} = (\mathbf{M}_1 \ \mathbf{M}_3 \ \mathbf{M}_2 \ \mathbf{M}_4)$$

注 1 在广义 KYP 引理中,矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 代表了系统的连续性与离散性, $\mathbf{\Psi}$ 表征了频段信息, $\mathbf{\Pi}$ 刻画了系统需要满足的有限频段性能指标^[5].

引理 2 (Finsler's Lemma^[21]) 对于 $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$,对称矩阵 $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(\mathbf{\Omega}) = r < n$,以下描述等价:

1) 对于任意 $\mathbf{m} \neq 0$ 且 $\mathbf{\Omega}\mathbf{m} = 0$,有 $\mathbf{m}^* \mathbf{\Xi} \mathbf{m} < 0$;

2) 存在 $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,使 $\mathbf{\Xi} + \mathbf{\Delta}\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^* \mathbf{\Delta}^* < 0$ 成立.

2 主要结果

由于跳变系统(4)具有多模态随机马尔可夫跳变特性,其传递函数难以通过系统(4)进行直接描述,故不能直接利用广义 KYP 引理进行时频域转换.因此,首先借鉴文[19]的思想,将目标闭环系统的随机稳定以及有限频段性能指标充分条件转化为重构确定系统的相应条件,具体见如下定理:

定理 1 当确定系统(7)李亚普诺夫渐近稳定,且满足指标 $|\hat{G}(j\omega)| < \gamma$,则原随机系统(1)渐近稳定,且满足指标 $|G(j\omega)| < \gamma$.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{q}}}(t) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{B}}_1\hat{\mathbf{w}}(t) + \hat{\mathbf{B}}_2\hat{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & \pi_{21}\mathbf{I} & \cdots & \pi_{s1}\mathbf{I} \\ \pi_{12}\mathbf{I} & \hat{\mathbf{A}}_2 & \cdots & \pi_{s2}\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{1s}\mathbf{I} & \pi_{2s}\mathbf{I} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_s \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_i = \frac{\pi_{ii}}{2}\mathbf{I} + \mathbf{A}_i, \quad \hat{\mathbf{w}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \text{diag}\{\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}, \dots, \mathbf{B}_{1s}\}$$

$$\hat{\mathbf{B}}_2 = \text{diag}\{\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}, \dots, \mathbf{B}_{2s}\}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \text{diag}\{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_s\}$$

证明 针对确定系统(7),考虑状态反馈控制输入:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{q}}(t)$$

其中, $\hat{\mathbf{K}} = \text{diag}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_s\}$,因此可得闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{q}}}(t) &= \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{B}}_1\hat{\mathbf{w}}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \pi_{21}\mathbf{I} & \cdots & \pi_{s1}\mathbf{I} \\ \pi_{12}\mathbf{I} & \bar{\mathbf{A}}_2 & \cdots & \pi_{s2}\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{1s}\mathbf{I} & \pi_{2s}\mathbf{I} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}_s \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \frac{\pi_{ii}}{2}\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_i$$

对系统(8)取李亚普诺夫函数: $V(q) = q^T(t)\hat{P}q(t)$, 由系统(8)李亚普诺夫渐近稳定可得:

$$\bar{A}^T \hat{P} + \hat{P} \bar{A} < 0 \quad (9)$$

则式(9)等价于:

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_{12} & \cdots & E_{1s} \\ * & E_2 & \cdots & E_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & E_s \end{pmatrix} < 0 \quad (10)$$

其中, 对角线元素为 $E_i = \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \pi_{ii} P_i$, 非对角线元素为 $E_{ij} = \pi_{ji} P_i + \pi_{ij} P_j$.

对式(10)右乘 $L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 得:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 + F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Omega_s + F_s \end{pmatrix} \leq 0 \quad (11)$$

为节约空间, 式(11)中非对角线元素省去, 其中:

$$\Omega_i = \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j$$

$$F_i = \left(\sum_{j=1}^s \pi_{js} - \pi_{ss} \right) P_s$$

可得式(11)中对角线元素满足:

$$\Omega_i + F_i < 0 \quad (12)$$

结合式(3)可得:

$$\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j < 0 \quad (13)$$

由文[22]中推论 3 可知, 式(13)意味着原随机跳变系统(4)渐近稳定.

另外, 由文[23]可得, 系统(7)满足性能指标 $|\hat{G}(j\omega)| < \gamma$, 可由以下条件得到:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A} & \hat{P} \hat{B} & \hat{C}^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (14)$$

则利用前文已证部分可得:

$$\begin{pmatrix} \xi & \hat{P} \hat{B} & \hat{C}^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (15)$$

其中, $\xi = \text{diag}\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s\}$.

利用 Schur 补定理, 对式(15)进行等价变形得:

$$\begin{pmatrix} \xi + \hat{C}^T \hat{C} & \hat{P} \hat{B} \\ * & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0$$

以上不等式等价于:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda_s \end{pmatrix} < 0 \quad (16)$$

其中, $\Lambda_i = \begin{pmatrix} \Omega_i + C_i^T C_i & P_i B_i \\ * & -\gamma^2 I \end{pmatrix}$. 则由式(16)可得:

$$\Lambda_i < 0 \quad (17)$$

对于原跳变系统(4)定义:

$$J_T = \int_0^T [y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt$$

则:

$$J_T = \int_0^T \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Omega_i + C_i^T C_i & P_i B_i \\ B_i^T P_i & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\} dt -$$

$$V(x(T))$$

则由式(17)可得:

$$J_T < 0 \quad (18)$$

由此可得 $|G(j\omega)| < \gamma$.

因此, 通过定理 1, 本文所考察的有限频段性能指标(5)和(6)转为考察系统(8)的如下性能指标:

$$|T_{zw}(j\omega)| < \gamma, \quad \forall |\omega| \leq \omega_l \quad (19)$$

$$|T_{zw}(j\omega)| < \rho, \quad \forall |\omega| \geq \omega_h \quad (20)$$

同时系统(8)还须满足李亚普诺夫渐近稳定性条件, 因此得到了如下定理.

定理 2 考虑闭环系统(8), 给定 Ψ, Φ , 常矩阵 R_l, R_h , 性能指标参数 γ, ρ 以及频率 ω_l 和 ω_h , 若存在 $P_l = P_l^*, P_h = P_h^*, Q_l = Q_l^* > 0, Q_h = Q_h^* > 0, V_l, V_h, \bar{W}$ 和 \bar{K} 等矩阵变量, 使以下不等式成立:

$$-(\hat{A}\bar{W} + \hat{B}_2\bar{K})^T - (\hat{A}\bar{W} + \hat{B}_2\bar{K}) < 0 \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} -Q_l & 0 & P_l & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P_l & 0 & \omega_l^2 Q_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < He \begin{pmatrix} \bar{W}R_l & 0 & 0 \\ 0 & -V_l & 0 \\ \hat{A}\bar{W}R_l & \hat{B}_1V_l & \hat{B}_2\bar{K}R_l \\ \hat{C}\bar{W}R_l & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} Q_h & 0 & P_h & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P_h & 0 & -\omega_h^2 Q_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho^2 I \end{pmatrix} < He \begin{pmatrix} \bar{W}R_h & 0 & 0 \\ 0 & -V_h & 0 \\ \hat{A}\bar{W}R_h & \hat{B}_1V_h & \hat{B}_2\bar{K}R_h \\ 0 & 0 & \bar{K}R_h \end{pmatrix} \quad (23)$$

则系统(8)李亚普诺夫稳定, 且满足多频段性能指标(19)和(20), 其控制器参数可由下式得到:

$$\hat{K} = \bar{K}\bar{W}^{-1}$$

其中:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \quad \Psi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_h^2 \end{pmatrix}$$

$$\Pi' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\rho^2 I \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_l^2 \end{pmatrix}$$

证明 根据引理 1, 式(19)等价于:

$$N \begin{pmatrix} \Phi \otimes P_l + \Psi \otimes Q_l & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix} N^* < 0 \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K} & \hat{B}_1 \\ \hat{C} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hat{C} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{B}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{K} \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \bar{A} + \bar{B} \hat{K} \bar{C} \end{aligned}$$

利用引理 2, 上式可转化为

$$\begin{aligned} &T \begin{pmatrix} \Phi \otimes P_l + \Psi \otimes Q_l & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix} T^* \\ &< He \left\{ \begin{pmatrix} I \\ -M \end{pmatrix} W \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

使问题可解, 将乘子 W 进行如下限制:

$$W = \bar{C}^+ \bar{W} R_l + (I - \bar{C}^+ \bar{C}) V_l, \det(W) \neq 0 \quad (26)$$

式(25)可以改写为

$$\begin{aligned} &T \begin{pmatrix} \Phi \otimes P_l + \Psi \otimes Q_l & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix} T^* \\ &< He \left\{ \Theta \times \begin{pmatrix} \bar{W} R_l \\ V_l \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{pmatrix} \bar{C}^+ & I - \bar{C}^+ \bar{C} \\ -\bar{A} \bar{C}^+ - \bar{B} \hat{K} & \bar{A} (\bar{C}^+ \bar{C} - I) \end{pmatrix} \\ \bar{C}^+ &= \bar{C}^* (\bar{C} \bar{C}^*)^{-1} = (I \ 0)^* \end{aligned}$$

则式(27)转化为

$$\begin{aligned} &T \begin{pmatrix} \Phi \otimes P_l + \Psi \otimes Q_l & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix} T^* \\ &< He \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{W} R_l \\ V_l \\ \bar{K} R_l \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

即条件(22).

同理可证, 条件(23)可推得闭环系统(8)满足性能指标(20).

令 $\hat{P} = -W^{-1}$, 对条件(21)左乘右乘, 可得:

$$(\hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K})^T \hat{P} + \hat{P} (\hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K}) < 0 \quad (29)$$

因此, 闭环系统(8)李亚普诺夫渐近稳定, 即原跳变系统(4)渐近稳定.

注 2 由于 \hat{P} 为对角阵结构, 因此在求解 W 时, 要注

意 W 具有对角结构.

进一步, 根据定理 2 的结果, 可以对不同频段下的性能指标进行如下优化:

定理 3 已知 Ψ, Φ , 常矩阵 R_l, R_h , 性能指标参数 γ 以及频率 ω_l 和 ω_h , 若存在 $P_l = P_l^*, P_h = P_h^*, Q_l = Q_l^* > 0, Q_h = Q_h^* > 0, V_l, V_h$ 和 \bar{W} 等矩阵变量, 可以通过以下算法求解得到系统的多频段状态反馈控制器参数 K_i 以及最优性能指标 ρ :

$$\begin{aligned} &\min \rho \\ &\text{s.t. 式(21) ~ 式(23)} \end{aligned}$$

3 仿真示例

考虑文[5]中所用的弹簧系统, 其弹性常量并非固定不变, 而是在一定范围内随机变化, 呈现出马尔可夫跳变特性, 因此可将其建立为具有如下系统参数的两模态跳变系统模型:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = B_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_{12} = B_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

其跳变率矩阵为

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.8 \\ 0.2 & -0.2 \end{pmatrix}$$

利用定理 1, 可得增广线性系统的系数矩阵为

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{A}_4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -0.4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_4 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -0.1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

取 $R_l = (0 \ 0 \ I \ 0)$, $R_h = (I \ 0 \ 0 \ 0)$, 系统初始状态为 $x_0 = (0.5 \ 0.2 \ 1.5 \ 1.4)^T$, $\gamma = 2$, $\omega_l = 2$, $\omega_h = 5$, 干扰信号为 $w(t) = 0.2 \sin \pi t$, 结合定理 3, 利用 Matlab 线性矩阵不等式工具箱求解得到控制器参数为

$$K_1 = (-7.190 \ 2 \ 3.362 \ 0 \ -2.605 \ 9 \ -5.803 \ 6)$$

$$K_2 = (-0.511 \ 1 \ 0.941 \ 3 \ -1.344 \ 7 \ -1.099 \ 2)$$

并得到 $\rho_{\min} = 1.650 \ 6$.

将所得参数代入原跳变系统(1), 并绘制出其状态响应曲线以及幅频特性图. 图 1 和图 2 所示为开环跳变系统状态响应曲线以及闭环系统状态响应图. 显然可以看到通过转化后系统所求解的控制器对于原跳变系统的有效性. 图 3 显示的是 $T_{z\hat{w}}$ 和 $T_{u\hat{w}}$ 的幅频特性图. 其中, 实线是 $|T_{z\hat{w}}^\wedge|$ 随频率 ω 变化的曲线, 虚线是 $|T_{u\hat{w}}^\wedge|$ 随频率变化的曲线. 蓝色区域显示的是低频段 $|T_{z\hat{w}}^\wedge|$ 的上限, 灰色区域显示的是高频段 $|T_{u\hat{w}}^\wedge|$ 的上限. 由于被控系统只需要在指定频段满足设定指标, 而不需要在全频段都满足, 所以从频域角度放松了对系统的设计要求, 降低了保守性. 例如, 在 $\omega < \omega_h = 5$ 的频段, $|T_{u\hat{w}}^\wedge|$ 可以大于 ρ_{\min} , 而不需要在整个频段都小于 ρ_{\min} .

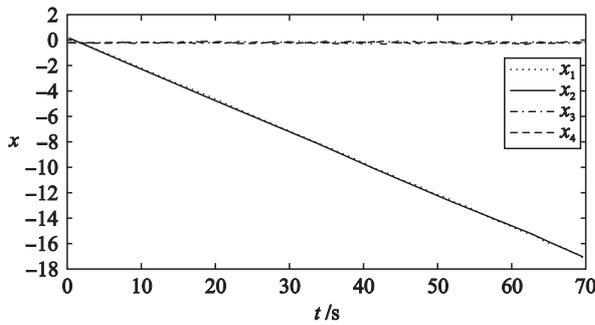


图 1 开环系统状态响应曲线

Fig.1 The state response curve of the open-loop system

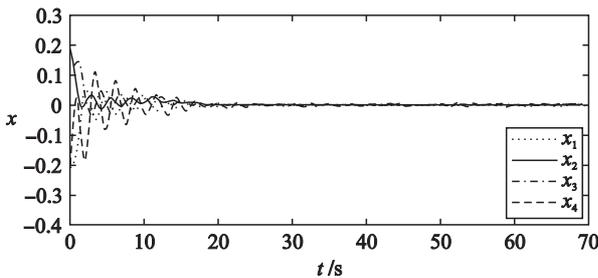


图 2 闭环系统状态响应曲线

Fig.2 The state response curve of the closed-loop system

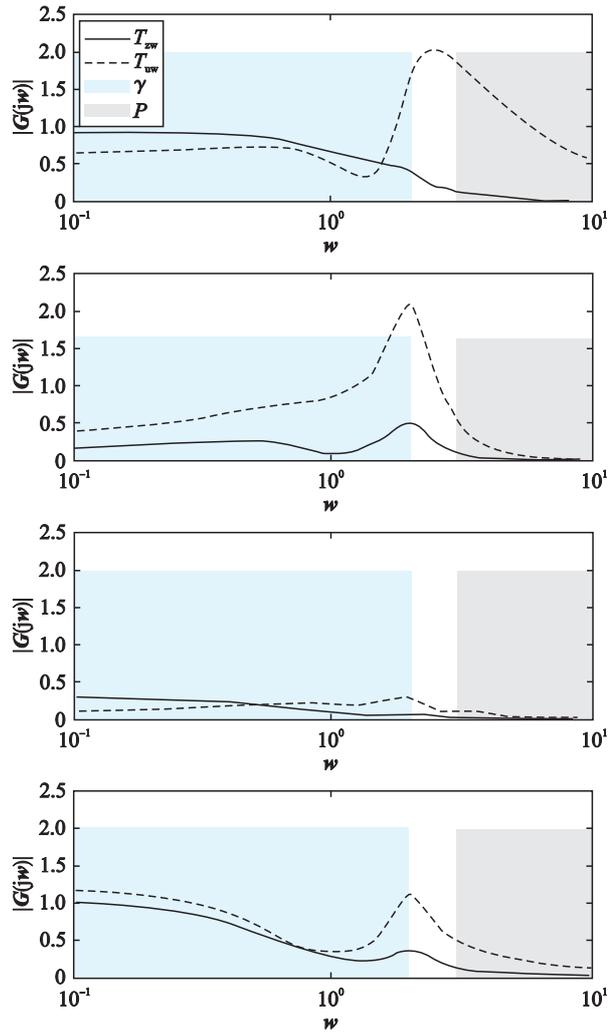


图 3 $T_{z\hat{w}}^\wedge$ 和 $T_{u\hat{w}}^\wedge$ 的幅频特性图

Fig.3 The amplitude-frequency figure of $T_{z\hat{w}}^\wedge$ and $T_{u\hat{w}}^\wedge$

在相同条件下, 分别调整 ω_l 和 ω_h 的大小, 得到表 1. 由表 1 可知, $\omega_h = 6$ 不变时, 将 ω_l 慢慢减小到 $\omega_l = 2$, 最优指标 ρ 也逐渐减小. 当 $\omega_l = 2$ 时, 将 ω_h 慢慢减小到 $\omega_h = \omega_l = 2$, 最优指标 ρ 逐渐增大. 由此可见, 频段越窄, 使被控系统实现设计目标所付出的控制能量越少.

表 1 频段宽度与最优性能指标 ρ 的关系

Tab.1 The relationship between the width of frequency band and optimal performance index ρ

ω_l / Hz	ω_h / Hz	ρ
5	6	1.974 6
4	6	1.755 4
3	6	1.739 5
2	6	1.622 1
2	5	1.650 6
2	4	1.815 3
2	3	1.971 4
2	2	3.346 2

此外,在相同参数下利用文[20]的结果求解被控系统 T_{zw} 的幅频特性曲线见图 4. 尽管每个子系统在规定频段 $\omega_l = 2$ 内满足 $\|G(j\omega)\|_\infty < 2$, 但从图 4 可以看到, 整个跳

变系统在规定频段 $\omega_l = 2$ 内的性能超过了上界 $\gamma = 2$, 因此单纯让各子系统满足性能要求并不等价于整个跳变系统满足性能要求.

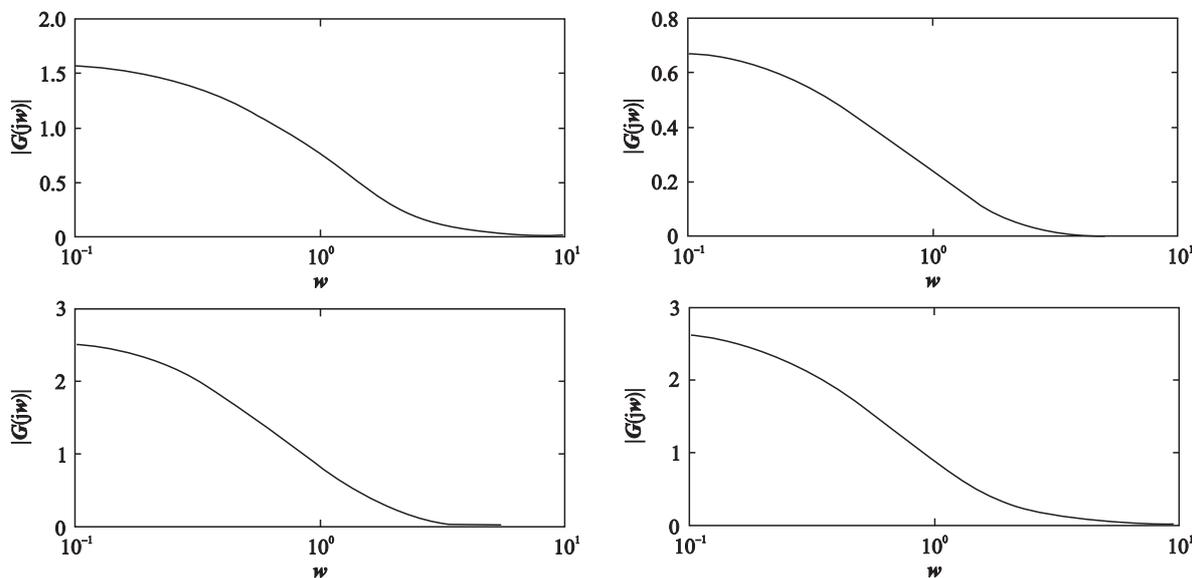


图 4 文[20]中结果得到的 T_{zw} 的幅频特性图

Fig.4 The amplitude-frequency figure of T_{zw} achieved by results in the reference [15]

4 结论

本文主要针对随机马尔可夫跳变系统的传递函数难以描述的问题, 将跳变系统的状态进行增广, 得到系数参数矩阵带有跳变率信息的增广确定系统, 然后利用广义 KYP 引理将表征多频段性能指标的频域不等式转化为线性矩阵

不等式, 求解得到使原随机跳变系统李亚普诺夫稳定并满足多频段多性能指标的状态反馈控制器参数. 本文从多频域角度降低了跳变系统的控制器设计保守性, 未来研究将结合有限时间理论, 从时间与频率两个不同的尺度, 研究马尔可夫跳变系统的多频段多指标问题.

参考文献

- [1] Iwasaki T, Meinsma G, Fu M. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2000, 6(2/3): 1465-1466.
- [2] Zhang S, Wang Z, Ding D, et al. On design of robust fault detection filter in finite-frequency domain with regional pole assignment[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2015, 62(4): 382-386.
- [3] 吴敏, 桂卫华, 何勇. 现代鲁棒控制[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2006.
Wu M, Gui W H, He Y. *Modern robust control*[M]. Changsha: Central South University Press, 2006.
- [4] Zhou K, Doyle J C, Glover K. *Robust and optimal control*[M]. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.
- [5] Iwasaki T, Hara S, Yamauchi H. Dynamical system design from a control perspective; Finite frequency positive-realness approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1337-1354.
- [6] Iwasaki T, Hara S. Robust control synthesis with general frequency domain specifications; Static gain feedback case[C]//2004 American Control Conference. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 2004: 4613-4618.
- [7] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma; Unified frequency domain inequalities with design applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41-59.
- [8] Hara S, Iwasaki T, Shiokata D. Robust PID control using generalized KYP synthesis; Direct open-loop shaping in multiple frequency ranges[J]. *IEEE Control Systems*, 2006, 26(1): 80-91.
- [9] Ding D W, Yang G H. Fuzzy filter design for nonlinear systems in finite-frequency domain[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(5): 935-945.
- [10] Lee D H. An improved finite frequency approach to robust H_∞ filter design for LTI systems with polytopic uncertainties[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, 27(11): 944-956.
- [11] Sun W, Zhao Y, Li J, et al. Active suspension control with frequency band constraints and actuator input delay[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(1): 530-537.

- [14] Teymourian E, Kayvanfar V, Komaki G M, et al. Enhanced intelligent water drops and cuckoo search algorithms for solving the capacitated vehicle routing problem[J]. *Information Sciences*, 2016, s334 – 335(1): 354 – 378.
- [15] 明波, 黄强, 王义民, 等. 基于改进布谷鸟算法的梯级水库优化调度研究[J]. *水利学报*, 2015, 46(3): 341 – 349.
Ming B, Huang Q, Wang Y M, et al. Research on optimal operation of cascade reservoirs based on improved cuckoo algorithm[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2015, 46(3): 341 – 349.
- [16] Huang L, Ding S, Yu S, et al. Chaos-enhanced cuckoo search optimization algorithms for global optimization[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 40(5/6): 3860 – 3875.
- [17] Jia B, Yu B, Wu Q, et al. Adaptive affinity propagation method based on improved cuckoo search[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 111: 27 – 35.
- [18] Wakaiki M, Yamamoto Y, Özbay H. Stable controllers for robust stabilization of systems with infinitely many unstable poles[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(62): 511 – 516.
- [19] Li T, Georgakis C. Dynamic input signal design for the identification of constrained systems[J]. *Journal of Process Control*, 2008, 18(3/4): 332 – 346.
- [20] Begum K G, Rao A S, Radhakrishnan T K. Maximum sensitivity based analytical tuning rules for PID controllers for unstable dead time processes[J]. *Chemical Engineering Research & Design*, 2016, 109: 593 – 606.
- [21] Nikita S, Chidambaram M. Tuning of PID controllers for time delay unstable systems with two unstable poles[J]. *IFAC Papersonline*, 2016, 49(1): 801 – 806.
- [22] Lee S C, Wang Q G. Stabilization conditions for a class of unstable delay processes of higher order[J]. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 2010, 41(4): 440 – 445.

作者简介

靳其兵(1971 -), 男, 博士, 教授, 研究领域为生产过程的先进控制、建模、优化。

苏奇新(1990 -), 男, 硕士生, 研究领域为智能优化算法、建模与控制。

(上接第 504 页)

- [12] Wang R, Jing H, Yan F, et al. Optimization and finite-frequency H_∞ control of active suspensions in in-wheel motor driven electric ground vehicles[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(2): 468 – 484.
- [13] Sun W, Li J, Zhao Y, et al. Vibration control for active seat suspension systems via dynamic output feedback with limited frequency characteristic[J]. *Mechatronics*, 2011, 21(1): 250 – 260.
- [14] Ezzine J, Haddad A H. Controllability and observability of hybrid dynamic[J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(6): 2045 – 2055.
- [15] Van de Schaft A, Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2000.
- [16] Liu J, Teel A R. Invariance principles for hybrid systems with memory[J]. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2016, 21: 130 – 138.
- [17] Zhao X G, Li J, Ye D. Fault detection for switched systems with finite-frequency specifications[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70(1): 409 – 420.
- [18] 赵长钟, 栾小丽, 刘飞. 基于有限频段的 Markov 跳变系统有限时间 H_∞ 滤波[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(3): 406 – 412.
Zhao C Z, Luan X L, Liu F. Finite-time H_∞ filtering for Markov jump systems in finite frequency domain[J]. *Control Theory and Application*, 2015, 32(3): 406 – 412.
- [19] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. Berlin, Germany: Springer Science & Business Media, 2006.
- [20] 周超洁, 栾小丽, 刘飞. 跳变系统在给定时间内的有限频段 H_∞ 控制[J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(2): 251 – 256.
Zhou C J, Luan X L, Liu F. Finite frequency H_∞ control for jump systems over given time interval[J]. *Control Theory and Application*, 2016, 33(2): 251 – 256.
- [21] Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis D E. A unified algebraic approach to control design[M]. Boca Raton, FO, USA: CRC Press, 1997.
- [22] Li L, Ugrinovskii V A. On necessary and sufficient conditions for H_∞ output feedback control of Markov jump linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 52(7): 1287 – 1292.
- [23] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
Yu L. Robust control: linear matrix inequality approach[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.

作者简介

周超洁(1992 -), 女, 硕士生. 研究领域为混杂系统的有限频段问题等。

栾小丽(1979 -), 女, 博士, 副教授. 研究领域为复杂系统先进控制与优化等。

刘 飞(1965 -), 男, 博士, 教授. 研究领域为先进控制理论与应用, 工业系统监控与诊断。