

# 基于 Takagi-Sugeno 模糊模型的分数阶混沌系统的预测投影同步

陈旭, 郑永爱

扬州大学信息工程学院, 江苏扬州 225127

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374010, 61472343, 61473249)

通信作者: 郑永爱, zhengyongai@163.com 收稿/录用/修回: 2017-03-29/2017-06-30/2017-07-20

## 摘要

研究了分数阶混沌系统的投影同步问题, 基于 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型和预测反馈控制, 提出了一种新的实现分数阶混沌系统同步的模糊预测投影同步方法. 利用分数阶李亚普诺夫直接方法, 导出了分数阶混沌系统的投影同步准则. 与现有的方法相比, 该方法具有控制器结构简单, 控制代价小及通用性强等特点, 可适用于混沌研究文献中一大类分数阶混沌系统. 通过对两个分数阶混沌系统的数值实验进一步验证了所提投影同步方法的有效性.

## 关键词

分数阶系统;  
混沌同步;  
Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型;  
预测控制  
中图法分类号: TP273  
文献标识码: A

# Predictive Projective Synchronization of Fractional-order Chaotic Systems Based on Takagi-Sugeno Fuzzy Models

CHEN Xu, ZHENG Yongai

College of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China

## Abstract

In this study, we investigated the projective synchronization problem of fractional-order chaotic systems. Based on the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model and prediction-based feedback control, we propose a new fuzzy predictive projective synchronization method for synchronizing fractional-order chaotic systems. To derive the predictive projective synchronization criteria of fractional-order chaotic systems, we use the fractional-order Lyapunov direct method. Compared with existing methods, this derived method has the advantages of a simple structure, low control cost and high generality. Furthermore, this method can be applied to a large class of fractional-order chaotic systems, as identified in the chaos research literature. We employ two fractional-order chaotic systems to demonstrate the effectiveness of the proposed projective synchronization method.

## Keywords

fractional-order system;  
chaotic synchronization;  
Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model;  
predictive control

## 0 引言

作为整数阶微积分自然推广的分数阶微积分是数学的一个研究分支, 它起源于 19 世纪, 已有近 300 年的历史. 随着对分数阶微积分研究的不断深入, 研究者普遍认为一些物理系统用分数阶微积分描述更加准确, 因此分数阶微积分已经成为科学和工程许多领域的研究热点之一. 现在, 人们发现许多分数阶动力系统表现出混沌与超混沌行为, 如分数阶 Chen 系统<sup>[1]</sup>、分数阶 Lorenz 系统<sup>[2-3]</sup>、分数阶 Genesio-Tesi 系统<sup>[4]</sup>、分数阶 Rössler 系统<sup>[5-6]</sup>、分数阶金融系统<sup>[7]</sup>和分数阶超混沌 Chen 系统<sup>[8]</sup>等. 另一方面, 混沌同步在保密通信领域有着巨大的应用前景. 自 1990 年

Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的定义并在电路中应用以来, 混沌同步迅速成为非线性研究领域的热点. 1999 年, Mainieri 和 Rehacek 在研究部分线性混沌系统中观察到的投影同步是重要的混沌同步类型<sup>[9]</sup>, 该同步类型为在一定条件下耦合的驱动系统与响应系统间的输出状态不仅相位锁定, 而且振幅还按某一比例因子关系演化. 近来, 投影同步已被许多学者进行了广泛的研究<sup>[10-13]</sup>.

T-S 模型是一种典型的动态系统模糊模型, 它将线性系统理论与模糊理论相结合来解决非线性系统控制问题, 将整个非线性系统的控制看作是多个局部线性系统控制的模糊叠加. 利用 T-S 型模糊系统精确表示混沌系统, 文[14]实现了混沌系统的同步控制.

由于 Ushio 等<sup>[15]</sup>提出的预测反馈控制方法不需要任何外部生成的控制信号,因此它是一种非常有效的控制方法.文[15]研究了整数阶离散混沌系统的预测控制,其中控制输入是由预测状态和当前状态的差决定.后来, Boukabou 等在文[16]中提出了整数阶连续时间混沌系统的预测反馈控制.基于 T-S 模糊模型和预测控制方法, Senouci<sup>[17]</sup>和 Zheng<sup>[18]</sup>等分别研究了整数阶和分数阶连续时间混沌系统的控制与同步.

基于 T-S 模糊模型和预测反馈控制,本文提出了一种新的实现分数阶混沌系统同步的模糊预测投影同步方法.基于分数阶李亚普诺夫直接方法,分数阶混沌系统渐近同步的充分条件被明确给出和严格的证明.数值仿真表明该方法的有效性.

## 1 分数阶微积分

分数阶微分的定义有多种,这里采用 Caputo 定义. Caputo 微分定义为<sup>[19]</sup>

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1)$$

式中,  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2)$$

考虑非自治分数阶系统:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}}{dt^\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (3)$$

其中,  $\alpha \in (0, 1)$  是分数阶,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态向量,  $\mathbf{f}(\cdot) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \in \mathbb{R}^n$  是可微的非线性向量函数.

**引理 1**<sup>[20]</sup> 设  $\mathbf{x}(t) = 0$  是非自治分数阶系统(3)的一个平衡点,假设存在一个李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}(t), t)$  和  $K$  类函数  $\gamma_i (i=1, 2, 3)$  满足:

$$\gamma_1(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(\mathbf{x}(t), t) \leq \gamma_2(\|\mathbf{x}(t)\|) \quad (4)$$

$$\frac{d^\alpha V(\mathbf{x}(t), t)}{dt^\alpha} \leq -\gamma_3(\|\mathbf{x}(t)\|) \quad (5)$$

这里  $\alpha \in (0, 1)$ , 那么系统(3)是渐近稳定的.

**引理 2**<sup>[19]</sup> 设  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  是一个可微函数向量, 那么对于任意  $t \geq 0$  且  $\alpha \in (0, 1)$ , 不等式(6)成立:

$$\frac{1}{2} \frac{d^\alpha (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t))}{dt^\alpha} \leq \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是一个  $n \times n$  维常值正定矩阵.

## 2 分数阶混沌系统的模糊预测同步

假设分数阶系统(3)作为驱动系统,该系统可用 T-S 模糊模型来精确描述:

Rule  $i$ : if  $z_1(t)$  is  $M_{i1}$  and  $\dots$  and  $z_p(t)$  is  $M_{ip}$

$$\text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t), i = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

其中,  $M_{ij} (j=1, 2, \dots, p)$  是模糊集合,  $r$  是模糊推理规则数,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  是状态向量,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $z_1(t) \sim z_p(t)$  是模糊前件变量,  $\alpha$  是分数阶系统的阶数且  $0 < \alpha < 1$ . 分数阶 T-S 模糊模型的最终输出形式为

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)]$ ,  $w_i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ ,  $M_i(\mathbf{z}(t))$  是  $\mathbf{z}(t)$  关于模糊集  $M_i$  的隶属函数,  $w_i(\mathbf{z}(t))$  满足:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t)) &> 0 \\ w_i(\mathbf{z}(t)) &\geq 0, i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (9)$$

假设用  $h_i(\mathbf{z}(t)) = \frac{w_i(\mathbf{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))}$  代替  $w_i(\mathbf{z}(t))$ , 则表达

式(8)为

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) &= 1 \\ h_i(\mathbf{z}(t)) &\geq 0, i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (11)$$

$h_i(\mathbf{z}(t))$  可以看作是模糊推理规则的正则化权重.

针对驱动系统(7)或驱动系统(10),构造响应系统:

Rule  $i$ : if  $z_1(t)$  is  $M_{i1}$  and  $\dots$  and  $z_p(t)$  is  $M_{ip}$

$$\text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{y}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_i \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}_i(t), i = 1, 2, \dots, r \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态向量,  $\mathbf{u}_i(t) = [u_1^i(t), u_2^i(t), \dots, u_n^i(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  是系统的控制输入.

响应系统最终输出形式为

$$\frac{d^\alpha \mathbf{y}(t)}{dt^\alpha} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}_i(t)) \quad (13)$$

**定义 1** 对于系统(10)和系统(13),如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \rho \mathbf{x}(t)\| = 0$ , 则称系统(10)和系统(13)实现了投影同步, 其中,  $\rho$  称为比例因子,  $\|\cdot\|$  表示欧氏范数.

定义同步误差为  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \rho \mathbf{x}(t)$ , 根据系统(10)和系统(13), 误差系统可表示为

$$\frac{d^\alpha \mathbf{e}(t)}{dt^\alpha} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}_i(t)) \quad (14)$$

显然, 系统(10)和系统(13)投影同步的问题转化为当  $t \rightarrow \infty$  时误差系统(14)的零解稳定性问题. 对误差系统(14)设计模糊预测控制器:

$$\mathbf{u}_i(t) = k_i (\mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}(t)) \quad (15)$$

这里, 同步增益  $k_i \in (-1, 0) (i=1, 2, \dots, r)$  在后面确定.

**注 1** 文[17-18]中的控制输入是预测不控制状态和实际控制状态的差乘以增益矩阵, 即  $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{K}_i (\mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t))$ , 其中增益矩阵  $\mathbf{K}_i$  需要通过 Matlab 中的线性矩阵不等式工具箱来求解. 本文的控制输入是预测不控制状态和实际控制状态的和乘以增益常数, 并且增益常数的取值范围更容易给出, 因此相比文[17-18]中的方法, 本文的方法更简单, 易于实现.

把方程(15)代入方程(14)得

$$\frac{d^\alpha \mathbf{e}(t)}{dt^\alpha} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))((1+k_i)\mathbf{A}_i + k_i\mathbf{I})\mathbf{e}(t) \quad (16)$$

下面的定理给出了受控投影同步误差系统(16)零解渐近稳定的一个充分条件, 即驱动系统(10)和响应系统(13)实现渐近投影同步的一个充分条件.

**定理 1** 设  $\mathbf{I}$  为  $n \times n$  维单位矩阵, 如果  $(1+k_i)\frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T}{2} + k_i\mathbf{I} < 0 (i=1, 2, \dots, r)$ , 那么受控投影同步误差系统(16)的零解是渐近稳定的, 即驱动系统(10)和响应系统(13)是渐近投影同步的.

**证明** 考虑一个李亚普诺夫函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \quad (17)$$

根据引理 2,  $V(t)$  沿系统(16)的分数阶导数满足:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha V(t)}{dt^\alpha} &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{d^\alpha \mathbf{e}(t)}{dt^\alpha} \right)^T \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \frac{d^\alpha \mathbf{e}(t)}{dt^\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))((1+k_i)\mathbf{A}_i + k_i\mathbf{I}) \right)^T \mathbf{e}(t) + \\ &\quad \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))((1+k_i)\mathbf{A}_i + k_i\mathbf{I}) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{e}^T(t) \left( (1+k_i) \frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T}{2} + k_i\mathbf{I} \right) \mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

因为  $(1+k_i)\frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T}{2} + k_i\mathbf{I} < 0 (i=1, 2, \dots, r)$ , 所以存在正交矩阵  $\mathbf{U}_i (i=1, 2, \dots, r)$  和正定对角矩阵  $\mathbf{A}_i = \text{diag}(\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_n^i) (i=1, 2, \dots, r)$  使得  $(1+k_i)\frac{\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T}{2} + k_i\mathbf{I} = -\mathbf{U}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{U}_i (i=1, 2, \dots, r)$ . 因此由式(18)可知:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha V(t)}{dt^\alpha} &\leq - \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{U}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{U}_i \mathbf{e}(t) \\ &\leq - \min_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n} \{ \lambda_j^i \} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

由引理 1 可知受控投影同步误差系统(16)的零解是渐近稳定的, 即驱动系统(10)和响应系统(13)是渐近投影同步的.

### 3 数值仿真

为了进一步验证上述所提同步方案的有效性, 仿真中研究了分数阶 Rössler 混沌系统和分数阶 Lorenz 混沌系统的同步.

#### 3.1 分数阶 Rössler 混沌系统

考虑式(20)的分数阶 Rössler 混沌系统作为驱动系统:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1(t)}{dt^\alpha} = -x_2(t) - x_3(t) \\ \frac{d^\alpha x_2(t)}{dt^\alpha} = x_1(t) + ax_2(t) \\ \frac{d^\alpha x_3(t)}{dt^\alpha} = bx_1(t) - (c-x_1(t))x_3(t) \end{cases} \quad (20)$$

当  $\alpha=0.97, a=0.34, b=0.4, c=4.5$  时, 图 1 为该分

数阶 Rössler 系统的混沌吸引子.

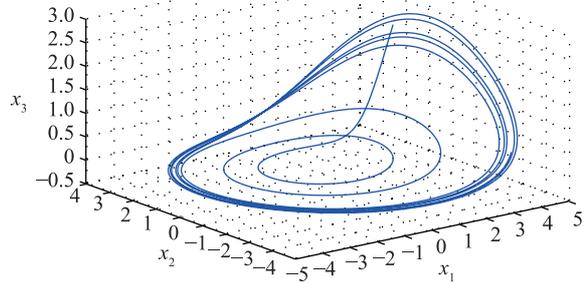


图 1 当  $\alpha=0.97, (a, b, c) = (0.34, 0.4, 4.5)$  时, 分数阶 Rössler 系统的混沌吸引子

Fig.1 The chaotic attractor of fractional order Rössler system with  $\alpha=0.97, (a, b, c) = (0.34, 0.4, 4.5)$

假设  $d=10$ , 分数阶 Rössler 系统的分数阶 T-S 模糊系统模型可以表示为

$$\begin{aligned} \text{Rule 1: if } x_1(t) \text{ is } F_1(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) \\ \text{Rule 2: if } x_1(t) \text{ is } F_2(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (21)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{模糊集 } F_1(x_1(t)) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c-x_1(t)}{d} \right), F_2(x_1(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c-x_1(t)}{d} \right). \end{aligned}$$

响应系统的 T-S 模糊系统模型表示为

$$\begin{aligned} \text{Rule 1: if } x_1(t) \text{ is } F_1(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{y}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}_1(t) \\ \text{Rule 2: if } x_1(t) \text{ is } F_2(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{y}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_2 \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}_2(t) \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T \\ \mathbf{u}_1(t) &= [u_1^1(t), u_2^1(t), u_3^1(t)]^T \\ \mathbf{u}_2(t) &= [u_1^2(t), u_2^2(t), u_3^2(t)]^T \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, F_1(x_1(t)), F_2(x_1(t))$  同上.

对上面的同步过程设计模糊预测控制器:

$$\mathbf{u}_i(t) = k_i(\mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}(t)) \quad (23)$$

根据定理 1, 当  $-1 < k_1 \leq -0.2537, -1 < k_2 \leq -0.9092$  时,

驱动系统(21)和响应系统(22)之间的模糊预测投影同步能够实现. 当  $\alpha = 0.97, a = 0.34, b = 0.4, c = 4.5, \rho = 2, k_1 = -0.7, k_2 = -0.95$  时, 图 2 给出了驱动系统(21)和响应系统(22)的混沌吸引子. 相应的投影同步误差状态曲线如图 3 所示. 从误差效果图 3 可以看出, 所设计的控制器可以实现分数阶 Rössler 混沌系统的预测投影同步.

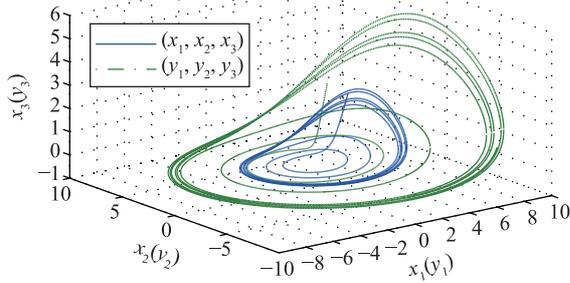


图 2 当  $\alpha = 0.97, \rho = 2, (a, b, c) = (0.34, 0.4, 4.5), (k_1, k_2) = (-0.7, -0.95)$  时, 驱动系统(21)和响应系统(22)的混沌吸引子

Fig.2 The chaotic attractors of drive system (21) and response system (22) with  $\alpha = 0.97, \rho = 2, (a, b, c) = (0.34, 0.4, 4.5), (k_1, k_2) = (-0.7, -0.95)$

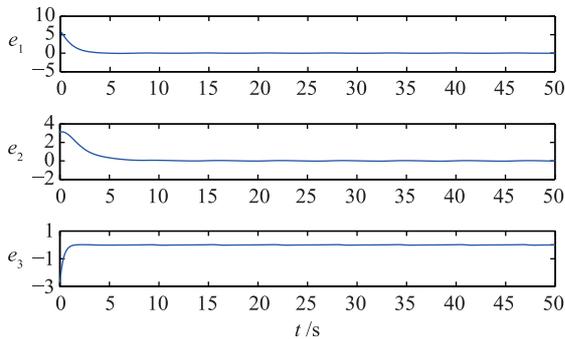


图 3 当  $\alpha = 0.97, \rho = 2, (a, b, c) = (0.34, 0.4, 4.5), (k_1, k_2) = (-0.7, -0.95)$  时, 驱动系统(21)和响应系统(22)之间投影同步的误差状态曲线

Fig.3 The error state curves of the projective synchronization between drive system (21) and response system (22) with  $\alpha = 0.97, \rho = 2, (a, b, c) = (0.34, 0.4, 4.5), (k_1, k_2) = (-0.7, -0.95)$

### 3.2 分数阶 Lorenz 混沌系统

考虑将式(24)的分数阶 Lorenz 混沌系统作为驱动系统:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1(t)}{dt^\alpha} = -ax_1(t) + ax_2(t) \\ \frac{d^\alpha x_2(t)}{dt^\alpha} = cx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \frac{d^\alpha x_3(t)}{dt^\alpha} = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t) \end{cases} \quad (24)$$

当  $\alpha = 0.994, a = 10, b = 8/3, c = 28$  时, 图 4 为该分数阶 Lorenz 系统的混沌吸引子.

与分数阶 Rössler 混沌系统的数值仿真类似, 假设  $d =$

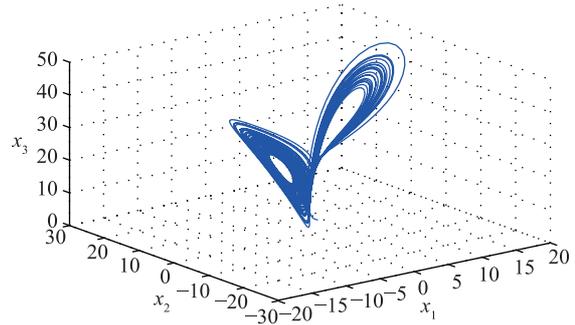


图 4 当  $\alpha = 0.994, (a, b, c) = (10, 8/3, 28)$  时, 分数阶 Lorenz 系统的混沌吸引子

Fig.4 The chaotic attractor of fractional order Lorenz system with  $\alpha = 0.994, (a, b, c) = (10, 8/3, 28)$

30, 分数阶 Lorenz 系统的分数阶 T-S 模糊系统模型可以表示为

$$\begin{aligned} \text{Rule 1: if } x_1(t) \text{ is } F_1(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) \\ \text{Rule 2: if } x_1(t) \text{ is } F_2(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{模糊集 } F_1(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x_1(t)}{d} \right), F_2(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x_1(t)}{d} \right).$$

响应系统的 T-S 模糊系统模型表示为

$$\begin{aligned} \text{Rule 1: if } x_1(t) \text{ is } F_1(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{y}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}_1(t) \\ \text{Rule 2: if } x_1(t) \text{ is } F_2(x_1(t)) \\ \text{then } \frac{d^\alpha \mathbf{y}(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}_2 \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}_2(t) \end{aligned} \quad (26)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T \\ \mathbf{u}_1(t) &= [u_1^1(t), u_2^1(t), u_3^1(t)]^T \\ \mathbf{u}_2(t) &= [u_1^2(t), u_2^2(t), u_3^2(t)]^T \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, F_1(x_1(t)), F_2(x_1(t))$  同上.

对上面的同步过程设计模糊预测控制器:

$$\mathbf{u}_i(t) = k_i(\mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}(t)) \quad (27)$$

根据定理 1, 当  $-1 < k_1 \leq -0.9334, -1 < k_2 \leq -0.9334$  时, 驱动系统(25)和响应系统(26)之间的模糊预测投影

同步能够实现. 当  $\alpha = 0.994$ ,  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$ ,  $\rho = -1$ ,  $k_1 = k_2 = -0.95$  时, 图 5 给出了驱动系统 (25) 和响应系统 (26) 的混沌吸引子. 相应的投影同步误差状态曲线如图 6 所示. 从误差效果图 6 可以看出, 所设计的控制器可以实现分数阶 Lorenz 混沌系统的预测投影同步.

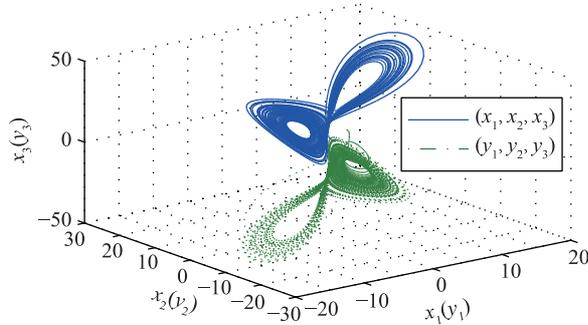


图 5 当  $\alpha = 0.994$ ,  $\rho = -1$ ,  $(a, b, c) = (10, 8/3, 28)$ ,  $k_1 = k_2 = -0.95$  时, 驱动系统 (25) 和响应系统 (26) 的混沌吸引子

Fig.5 The chaotic attractors of drive system (25) and response system (26) with  $\alpha = 0.994$ ,  $\rho = -1$ ,  $(a, b, c) = (10, 8/3, 28)$ ,  $k_1 = k_2 = -0.95$

## 4 结论

本文针对分数阶混沌系统的投影同步问题, 采用 T-S 模糊模型精确表示分数阶混沌系统, 设计一种新的模糊预测控制器, 即控制输入是预测不控制状态和实际控制状态的和乘以增益常数, 实现分数阶混沌系统的模糊预测投影

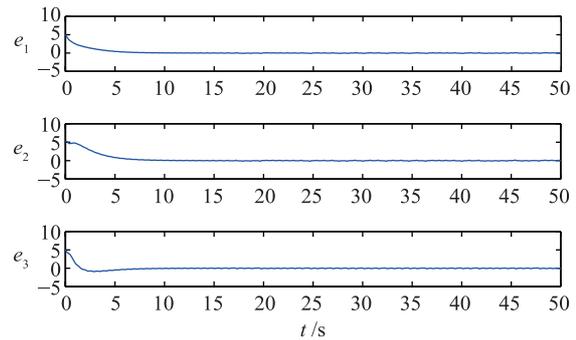


图 6 当  $\alpha = 0.994$ ,  $\rho = -1$ ,  $(a, b, c) = (10, 8/3, 28)$ ,  $k_1 = k_2 = -0.95$  时, 驱动系统 (25) 和响应系统 (26) 之间投影同步的误差状态曲线

Fig.6 The error state curves of the projective synchronization between drive system (25) and response system (26) with  $\alpha = 0.994$ ,  $\rho = -1$ ,  $(a, b, c) = (10, 8/3, 28)$ ,  $k_1 = k_2 = -0.95$

同步. 利用分数阶李亚普诺夫直接方法, 对模糊预测控制器的稳定性进行了分析, 导出了分数阶混沌系统的投影同步准则. 以分数阶 Rössler 混沌系统和分数阶 Lorenz 混沌系统为例, 数值仿真结果验证了所提投影同步方法的有效性. 与现有的结果相比, 该方法具有控制器结构简单, 控制代价小及通用性强等特点, 可适用于混沌研究文献中一大类分数阶混沌系统. 本文所提的分数阶混沌系统的模糊预测投影同步方法需要分数阶混沌系统的数学模型, 如何在分数阶混沌系统的数学模型未知的情况下实现系统的模糊预测投影同步, 有待进一步研究.

## 参考文献

- [1] Asheghan M M, Hamidi Beheshti M T, Tavazoei M S. Robust synchronization of perturbed Chen's fractional-order chaotic systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(2): 1044 - 1051.
- [2] Zhang Z, Shao H, Wang Z, et al. Reduced-order observer design for the synchronization of the generalized Lorenz chaotic systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(14): 7614 - 7621.
- [3] Wu X J, Shen S L. Chaos in the fractional-order Lorenz system[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2009, 86(7): 1274 - 1282.
- [4] Faioghi M R, Delavari H. Chaos in fractional-order Genesio-Tesi system and its synchronization[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(2): 731 - 741.
- [5] Letellier C, Aguirre L A. Dynamical analysis of fractional-order Rössler and modified Lorenz systems[J]. Physics Letters A, 2013, 377(28/29/30): 1707 - 1719.
- [6] Sudheer K S, Sabir M. Adaptive modified function projective synchronization of multiple time-delayed chaotic Rossler system[J]. Physics Letters A, 2011, 375(8): 1176 - 1178.
- [7] Wang Z, Huang X, Shi G D. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1531 - 1539.
- [8] Hegazi A S, Matouk A E. Dynamical behaviors and synchronization in the fractional order hyperchaotic Chen system[J]. Application Math Letters, 2011, 24(11): 1938 - 1944.
- [9] Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three dimensional chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1999, 82(15): 3042 - 3045.
- [10] Shi Y C, Zhu P Y, Qin K. Projective synchronization of different chaotic neural networks with mixed time delays based on an integral sliding mode controller[J]. Neurocomputing, 2014, 123(10): 443 - 449.
- [11] Li C L, Zhang M, Zhou F, et al. Projective synchronization for a fractional-order chaotic system via single sinusoidal coupling[J]. Optik, 2015, 127(5): 2830 - 2836.

- [18] Vidal T, Crainic T G, Gendreau M. Implicit depot assignments and rotations in vehicle routing heuristics[J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 237(1): 15–28.
- [19] Karakatic S, Podgorelec V. A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem[J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 27: 519–532.
- [20] Escobar J W, Linfati R, Toth P. A hybrid granular Tabu search algorithm for the multi-depot vehicle routing problem[J]. *Journal of Heuristics*, 2014, 20(5): 483–509.
- [21] 裴振兵, 陈雪波. 改进蚁群算法及在车辆运输调度中的应用[J]. *信息与控制*, 2015, 44(6): 753–758.  
Pei Z B, Chen X B. Improved ant colony algorithm and its application to vehicle routing and scheduling[J]. *Information and Control*, 2015, 44(6): 753–758.
- [22] 姜文英, 林焰, 陈明, 等. 基于粒子群和蚁群算法的船舶机舱规划方法[J]. *上海交通大学学报*, 2014, 48(4): 502–507.  
Jiang W Y, Lin Y, Chen M, et al. An optimization approach based on Particle Swarm Optimization ant colony optimization for arrangement of marine engine room[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2014, 48(4): 502–507.
- [23] 张超, 李擎, 陈鹏, 等. 一种基于粒子群参数优化的改进蚁群算法及其应用[J]. *北京科技大学学报*, 2013, 35(7): 955–960.  
Zhang C, Li Q, Chen P, et al. Improved ant colony optimization based on particle swarm optimization and its application[J]. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2013, 35(7): 955–960.
- [24] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]//*Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1995: 1942–1948.
- [25] Dorigo M, Maniezzo V, Colomi A. Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1996, 26(1): 29–41.

## 作者简介

王雷震(1965–), 男, 硕士, 教授, 硕士生导师. 研究领域为物流系统工程, 商业与服务系统运作优化与决策.  
汪定伟(1948–), 男, 博士, 教授, 博士生导师. 研究领域为计算机集成制造, 生产计划与调度, 建模与优化等.  
王素欣(1976–), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师. 研究领域为物流管理, 车辆调度, 智能优化等.

(上接第 563 页)

- [12] Boulkroune A, Bouzeriba A, Bouden T. Fuzzy generalized projective synchronization of incommensurate fractional-order chaotic systems[J]. *Neurocomputing*, 2016, 173(P3): 606–614.
- [13] Bai J, Yu Y G, Wang S, et al. Modified projective synchronization of uncertain fractional order hyperchaotic systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(4): 1921–1928.
- [14] Lian K W, Chiu C S, Chiang T S, et al. LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2001, 9(4): 539–553.
- [15] Ushio T, Yamamoto S. Prediction-based control of chaos[J]. *Physics Letters A*, 1999, 264(1): 30–35.
- [16] Boukabou A, Chebbah A, Mansouri N. Predictive control of continuous chaotic systems[J]. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2011, 18(2): 587–592.
- [17] Senouci A, Boukabou A. Predictive control and synchronization of chaotic and hyperchaotic systems based on a T-S fuzzy model[J]. *Mathematics & Computers in Simulation*, 2014, 105(11): 62–78.
- [18] Zheng Y. Fuzzy prediction-based feedback control of fractional-order chaotic systems[J]. *Optik*, 2015, 126(24): 5645–5649.
- [19] Duarte-Mermoud M, Aguila-Camacho N, Gallegos J A, et al. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 22(1/2/3): 650–659.
- [20] Li Y, Chen Y, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag Leffler stability[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(5): 1810–1821.

## 作者简介

陈旭(1992–), 男, 硕士生. 研究领域为混沌同步, 非线性系统.  
郑永爱(1966–), 男, 博士, 教授. 研究领域为混沌理论与应用.