

多变量分数阶滞后系统预测控制参数解析调优

贺利乐¹, 姜依纯¹, 贺 宁¹, 吴 文², 曹 进³

1. 西安建筑科技大学机电工程学院, 陕西 西安 710055;

2. 长安大学道路施工技术与装备教育部重点实验室, 陕西 西安 710064;

3. 国家电网公司西北分部, 陕西 西安 710048

基金项目: 陕西省教育厅基础科学研究专项计划资助项目(18JK0438); 陕西省科协青年人才托举计划资助项目(20180112); 道路施工技术
与装备教育部重点实验室(长安大学)开放基金资助项目(300102258501); 陕西省自然科学基金青年人才基金资助项目(2019JQ-004)

通信作者: 贺宁, hening@xauat.edu.cn 收稿/录用/修回: 2019-05-06/2019-07-24/2019-09-21

摘要

提出了一种针对各子系统由一阶加分数阶滞后模型描述的多变量系统模型预测控制参数解析调优方法. 首先推导了多变量分数阶滞后系统的状态空间模型; 其次, 基于该模型构建模型预测控制优化问题, 并获得了控制信号的解析表达式; 再次, 对闭环控制系统进行解耦分析, 揭示了模型预测控制器参数与系统闭环性能间的定量关系, 通过将参数调优问题转化为极点配置问题, 得到能够保证闭环系统性能的模型预测控制器参数取值的解析表达式; 最后通过仿真实验验证了本文所设计的参数解析调优算法的有效性.

关键词

模型预测控制
参数调优
多变量分数阶滞后系统
解析法
中图法分类号: TP273
文献标识码: A

Analytical Tuning of Predictive Control for a Multivariable Fractional Dead Time System

HE Lile¹, JIANG Yichun¹, HE Ning¹, WU Wen², CAO Jin³

1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;

2. Key Laboratory for Highway Construction Technology and Equipment of Ministry of Education (Chang'an University), Xi'an 710064, China;

3. Northwest Branch of State Grid Corporation of China, Xi'an 710048, China

Abstract

In this study, we propose an analytical model predictive control (MPC) tuning approach for a multivariable system described by first order plus fractional dead time model for each subsystem. Initially, the multivariable fractional dead time system is transformed into the state space form. Subsequently, an MPC optimization problem is constructed based on the aforementioned model, and an analytical expression can be obtained for the control signal. In addition, the decoupling analysis of the closed-loop control system reveals the quantitative relation between the predictive controller parameters of the model and the closed-loop performance of the system. Therefore, the parameter tuning problem can be redefined as a pole placement problem, and the MPC tuning formulas that ensure closed-loop performance are developed. Finally, the simulation results denote the effectiveness of the proposed analytical parameter tuning method.

Keywords

model predictive control;
parameter tuning;
multivariable fractional
dead time system;
analytical

0 引言

模型预测控制(model predictive control, MPC)因其对模型要求低, 鲁棒性强, 抗干扰性强等特点, 目前已广泛地应用于过程控制领域中^[1-7]. 在 MPC 设计中, 随着被控系统愈发的复杂化, 其中经常存在着模型不确定性、输入

输出干扰、时间滞后等元素, 使得系统闭环分析变得尤为困难. 由于许多工业控制过程可以通过 1 阶加滞后(first order plus dead time, FOPDT)模型来描述, 因此可以利用该模型来分析 MPC 闭环性能并推导有效的参数调优公式^[8-10]. 传统的 MPC 调优参数包括预测时域、控制时域和代价函数中的权重矩阵, 这些参数显著影响系统的闭环

性能、稳定性及鲁棒性^[11-12]. 对于多变量系统, 由于其输入输出之间存在着复杂的耦合关系, 参数调优变得更为复杂^[13]. 现有工业应用中的参数调优方法更多的是基于工程经验或是数值方法, 大大增加了参数设计的盲目性, 同时耗费时间多, 计算成本也大^[14]. 另外, 利用数值方法得到的数值结果也并不适用于闭环研究, 因此基于解析法来研究多变量系统预测控制参数调优方法有着重要的意义.

文[15]采用凸优化方法对多变量 MPC 权重矩阵与预测步长进行调优来实现所需闭环性能. 文[16]基于多变量系统提出了一种具有一定鲁棒性的无偏差 MPC 参数调优方法. 文[17]针对单变量 FOPDT 模型的 MPC, 提出一种在无有效约束条件下的解析参数调优方法; 文[18]在此基础上提出了针对多变量系统的解析参数调优方法. 需要强调的是, 对于一些滞后为分数阶的系统, 由于当系统的滞后时间相对于时间常数较大时, 将分数阶滞后近似为整数阶滞后将使系统闭环性能恶化, 严重影响系统性能品质, 因此需要专门针对分数阶滞后系统, 进行参数调优方法研究. 现有的参考文献中, 仅文[19]提出了一种针对单变量分数阶滞后系统的模型预测控制解析参数调优方法. 由于工业应用被控对象一般为多变量系统, 因此亟需研究针对多变量分数阶系统的预测控制解析参数调优方法.

本文针对基于 FOPDT 的多变量分数阶滞后系统, 详细研究模型预测控制参数的解析调优问题, 最后以 pH 中和过程为例验证该方法的控制效果.

1 问题描述

在本节中, 推导多变量分数阶滞后系统的状态空间方程模型, 并给出所提出 MPC 参数的调优基础公式. 结合分数阶滞后系统应用特点, 其模型的建立基于假设: 对于每一个输出, 任一个输入的动态响应和时滞均相同.

1.1 过程模型

本文中所考虑的多变量系统传递函数为

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (1)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= [y_1(s), y_2(s), \dots, y_m(s)]^T \\ \mathbf{u}(s) &= [u_1(s), u_2(s), \dots, u_m(s)]^T \\ \mathbf{G}(s) &= [g_{ij}(s)] \\ g_{ij}(s) &= k_{ij} \frac{e^{-\theta_{ij}s}}{\tau_{ij}s + 1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

经过采样时间为 T_s 的离散后得到滞后为分数阶的模型为

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{G}(z)\mathbf{u}(n) \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= [y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)]^T \\ \mathbf{u}(n) &= [u_1(n), u_2(n), \dots, u_m(n)]^T \\ \mathbf{G}(z) &= [g_{ij}(z)] \end{aligned} \quad (4)$$

$$g_{ij}(z) = k_{ij}(1 - a_i) \frac{(1 - b_i)z + b_i}{z^{d_i+1}(z - a_i)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

式中, $y_i(n)$ 是系统的第 i 个输出; $u_j(n)$ 是系统的第 j 个控

制信号; $a_i = e^{-T_s/\tau_i}$; $\theta_i = T_s(d_i + b_i)$, $0 \leq b_i < 1$, 并且 d_i 是一个非负整数. 需要强调的是, 滞后时间通常为采样时间的非整数倍, 因此离散模型的滞后为非整数阶.

令 $\mathbf{K}$ 为 $\mathbf{G}(z)$ 的稳态增益矩阵:

$$\mathbf{K} = [k_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

令 $\mathbf{P}(z)$ 和 $\mathbf{D}(z)$ 分别为式(3)的动态和时滞矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z) &= \text{diag} \left((1 - a_1) \frac{(1 - b_1)z + b_1}{z(z - a_1)}, \right. \\ &\quad (1 - a_2) \frac{(1 - b_2)z + b_2}{z(z - a_2)}, \dots, \\ &\quad \left. (1 - a_m) \frac{(1 - b_m)z + b_m}{z(z - a_m)} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{D}(z) = \text{diag}(z^{-d_1}, z^{-d_2}, \dots, z^{-d_m}) \quad (7)$$

因此可以得到:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{P}(z)\mathbf{D}(z)\mathbf{K} \quad (8)$$

将式(3)模型转换为状态空间方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n) \end{aligned} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= [\mathbf{x}_1^T(n), \mathbf{x}_2^T(n), \dots, \mathbf{x}_m^T(n)]^T \\ \mathbf{A} &= \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m) \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{B}_1^T, \mathbf{B}_2^T, \dots, \mathbf{B}_m^T]^T \\ \mathbf{C} &= \text{diag}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m) \end{aligned} \quad (10)$$

式中, 每一个输出 $y_i(n)$ 和任一输入之间的状态空间方程可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(n+1) &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i(n) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}_i(n) &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}_i(n) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(n) &= [y_i(n), y_i(n+1), \dots, y_i(n+d_i), \\ &\quad (1 - a_i)b_i \sum k_{ij}u_j(n-1)]^T \\ \mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_i &= (1 - a_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{i1}(1 - b_i) & k_{i2}(1 - b_i) & \dots & k_{im}(1 - b_i) \\ k_{i1}b_i & k_{i2}b_i & \dots & k_{im}b_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_i = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

因此式(9)所描述的系统是能控能观的.

1.2 输出预测解析表达式

定义模型输出预测值为

$$\hat{\mathbf{y}}(n) = \mathbf{F}\mathbf{x}(n) + \mathbf{S}\bar{\mathbf{u}}(n) \quad (13)$$

式中,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(n) &= [\hat{\mathbf{y}}_1^T(n), \hat{\mathbf{y}}_2^T(n), \dots, \hat{\mathbf{y}}_m^T(n)]^T \\ \hat{\mathbf{y}}_i(n) &= [\hat{\mathbf{y}}_i(n+d_i+1|n), \hat{\mathbf{y}}_i(n+d_i+2|n), \dots, \\ &\quad \hat{\mathbf{y}}_i(n+d_i+P_i|n)]^T \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(n) &= [\mathbf{u}_1^T(n), \mathbf{u}_2^T(n), \dots, \mathbf{u}_m^T(n)]^T \\ \mathbf{u}_i(n) &= [\mathbf{u}_i(n), \mathbf{u}_i(n+1), \dots, \mathbf{u}_i(n+M_i-1)]^T, \\ &\quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

式中, $\hat{\mathbf{y}}_i(\cdot|n)$ 为 n 时刻第 i 个模型输出预测值, P_i 是第 i 个输出的预测时域, M_i 是第 i 个控制时域, d_i 是第 i 个输出与输入之间的滞后,

$$\mathbf{S}_{ij} = k_{ij}(1-a_i) \left\{ (1-b_i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_i & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_i & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1+a_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_i^{P_i-1} & a_i^{P_i-2} & \cdots & a_i^{P_i-M_j+1} & 1+a_i+\cdots+a_i^{P_i-M_j} \end{bmatrix} + b_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_i & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_i & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1+a_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_i^{P_i-2} & a_i^{P_i-3} & \cdots & a_i^{P_i-M_j} & 1+a_i+a_i^{P_i-M_j-1} \end{bmatrix} \right\}, \quad (17b)$$

$i, j=1, 2, \dots, m$

系统输出预测值为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_p(n) &= [\hat{\mathbf{y}}_{p1}^T(n), \hat{\mathbf{y}}_{p2}^T(n), \dots, \hat{\mathbf{y}}_{pm}^T(n)]^T \\ &= \hat{\mathbf{y}}(n) + (\text{diag}[\mathbf{1}_{P_1 \times 1}, \mathbf{1}_{P_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{P_m \times 1}])\mathbf{b}(n) \\ \hat{\mathbf{y}}_{pi}(n) &= [\hat{\mathbf{y}}_{pi}(n+d_i+1|n), \hat{\mathbf{y}}_{pi}(n+d_i+2|n), \dots, \\ &\quad \hat{\mathbf{y}}_{pi}(n+d_i+P_i|n)]^T, \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (18)$$

式中, $\hat{\mathbf{y}}_{pi}(\cdot|n)$ 为 n 时刻第 i 个系统输出预测值; $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$; $\mathbf{b}(n)$ 是偏差项:

$$\mathbf{b}(n) = [b_1(n), b_2(n), \dots, b_m(n)]^T = \mathbf{y}_p(n) - \mathbf{y}(n) \quad (19)$$

$\mathbf{y}_p(n) = [y_{p1}(n), y_{p2}(n), \dots, y_{pm}(n)]^T$

式中, $\mathbf{y}_{pi}(n)$ 为第 i 个系统输出值.

1.3 代价函数

预测控制最优控制问题代价函数可描述为

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{u}}(n)} & (\bar{\mathbf{w}}(n) - \hat{\mathbf{y}}_p(n))^T \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{w}}(n) - \hat{\mathbf{y}}_p(n)) + \\ & (\mathbf{u}_{ss} - \bar{\mathbf{u}}(n))^T \mathbf{R}(\mathbf{u}_{ss} - \bar{\mathbf{u}}(n)) \\ \text{s.t. } & u_{i\min} \leq u_i(n+j) \leq u_{i\max} \\ & j=0, 1, \dots, M_i-1, i=1, 2, \dots, m \\ & y_{i\min} \leq \hat{\mathbf{y}}_{pi}(n+j|n) \leq y_{i\max} \\ & j=d_i+1, d_i+2, \dots, d_i+P_i, i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(n) &= (\text{diag}[\mathbf{1}_{P_1 \times 1}, \mathbf{1}_{P_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{P_m \times 1}])\mathbf{w}(n) \\ \mathbf{w}(n) &= [w_1(n), w_2(n), \dots, w_m(n)]^T \\ \mathbf{u}_{ss}(n) &= \text{diag}(\mathbf{1}_{M_1 \times 1}, \mathbf{1}_{M_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{M_m \times 1}) \cdot \\ &\quad \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)) \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $\mathbf{Q}$ 为半正定权重矩阵, $\mathbf{R}$ 为正定权重矩阵, $w_i(\cdot)$ 是

$$\mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{22}, \dots, \mathbf{F}_{mm})$$

$$\mathbf{F}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{d_i+1} \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{d_i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{d_i+P_i} \end{bmatrix} = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{F}_{d_i+2}] \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \mathbf{0}_{P_i \times 1}, \quad i=1, 2, \dots, d_i \\ \mathbf{F}_{d_i+1} &= a_i \mathbf{F}_{d_i+2} = [a_i, a_i^2, \dots, a_i^{P_i}]^T, \\ &\quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\mathbf{0}$ 是含有相对应维度的零矩阵,

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_{ij}], \quad i=1, 2, \dots, m \quad (17a)$$

第 i 个参考信号; $\mathbf{u}_{ss}(n)$ 是控制信号的稳态值.

1.4 预测控制最优控制量解析表达式

在无有效约束的条件下, 推导得预测控制最优控制量解析表达式为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(n) &= (\mathbf{R} + \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{Q} (\text{diag}(\mathbf{1}_{P_1 \times 1}, \mathbf{1}_{P_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{P_m \times 1}) \cdot \\ &\quad (\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)) - \mathbf{S}^T \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{F}}_y \bar{\mathbf{x}}_y(n) + \bar{\mathbf{F}}_u \bar{\mathbf{x}}_u(n)) + \\ &\quad \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} (\text{diag}(\mathbf{1}_{M_1 \times 1}, \mathbf{1}_{M_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{M_m \times 1}) \cdot \\ &\quad (\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)))) \end{aligned} \quad (22)$$

式中,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_y &= \text{diag}(\bar{\mathbf{F}}_{y1}, \bar{\mathbf{F}}_{y2}, \dots, \bar{\mathbf{F}}_{ym}) \\ \bar{\mathbf{F}}_u &= \text{diag}(\bar{\mathbf{F}}_{u1}, \bar{\mathbf{F}}_{u2}, \dots, \bar{\mathbf{F}}_{um}) \\ \bar{\mathbf{F}}_{yi} &= \mathbf{F}_{d_i+1} \\ \bar{\mathbf{F}}_{ui} &= \mathbf{F}_{d_i+2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_u = \mathbf{H} \bar{\mathbf{F}}_y = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m^{-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_y \quad (24)$$

将式(22)简化可得到:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(n) &= (\mathbf{R} + \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{Q} (\text{diag}(\mathbf{1}_{P_1 \times 1}, \mathbf{1}_{P_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{P_m \times 1}) \cdot \\ &\quad (\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)) - \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{F}}_y (\bar{\mathbf{x}}_y(n) + \mathbf{H} \bar{\mathbf{x}}_u(n)) + \\ &\quad \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} (\text{diag}(\mathbf{1}_{M_1 \times 1}, \mathbf{1}_{M_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{M_m \times 1}) \cdot \\ &\quad (\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)))) \end{aligned} \quad (25)$$

式中, $\bar{x}_y(n)$ 和 $\bar{x}_u(n)$ 代表 $x(n)$ 中相对应的状态变量.

令:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= (R + S^T Q S)^{-1} S^T Q \bar{F}_y \\ \bar{F} &= (R + S^T Q S)^{-1} (S^T Q (\text{diag}(\mathbf{1}_{p_1 \times 1}, \mathbf{1}_{p_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{p_m \times 1})) + \\ &\quad R(\text{diag}(\mathbf{1}_{M_1 \times 1}, \mathbf{1}_{M_2 \times 1}, \dots, \mathbf{1}_{M_m \times 1}) K^{-1}))\end{aligned}\quad (26)$$

因此, 式(25)可以简化为

$$\bar{u}(n) = \bar{F}(\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)) - \bar{\Phi}(\bar{x}_y(n) + H\bar{x}_u(n)) \quad (27)$$

根据式(27)得到当前时刻系统预测控制器的最优控制信号表达式为

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{F}(\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)) - \Phi(\bar{x}_y(n) + H\bar{x}_u(n)) \quad (28)$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= X\bar{F} \\ \Phi &= X\bar{\Phi} \\ X &= [X_1, X_2, \dots, X_m], X_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times M_i} \\ X_\alpha \\ \mathbf{0}_{(m-1) \times M_i} \end{bmatrix} \\ X_\alpha &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, i=1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (29)$$

式中, $\mathbf{0}_{(i-1) \times M_i}$ 是 $(i-1) \times M_i$ 的零矩阵, $\mathbf{0}_{(m-1) \times M_i}$ 是 $(m-1) \times M_i$ 的零矩阵.

由式(24)和式(28)可得:

$$\begin{aligned}\bar{x}_y(n) &= D(z)^{-1} \mathbf{y}(n) \\ H\bar{x}_u(n) &= MK\mathbf{u}(n-1) = MKZ(z)\mathbf{u}(n)\end{aligned}\quad (30)$$

其中,

$$\begin{aligned}M &= \text{diag}((1-a_1)(b_1/a_1), (1-a_2)(b_2/a_2), \\ &\quad \dots, (1-a_m)(b_m/a_m)) \\ Z(z) &= \text{diag}(\underbrace{z^{-1}, z^{-1}, \dots, z^{-1}}_{m\uparrow})\end{aligned}\quad (31)$$

根据式(30), 式(28)可转化为

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{F}(\mathbf{w}(n) - \mathbf{b}(n)) - \Phi(D(z)^{-1} \mathbf{y}(n) + MKZ(z)\mathbf{u}(n)) \quad (32)$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= [\gamma_{ij}] \\ \Phi &= [\phi_{ij}], i, j=1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (33)$$

式(32)说明, 可以通过选择所需增益矩阵 Φ_d 和 $\mathbf{F}_d$ 获得所需控制信号. 因此参数解析调优可以通过分析增益矩阵与调优参数 (Q, R, P_i 和 M_j) 之间的对应关系来实现. 在该框架下, 多变量一阶加分数阶滞后系统的模型预测控制所需性能是能够实现的. 然而, 并非任一所需性能都是能够实现的. 另外, 一些满足所需性能的增益矩阵也可能不能确保闭环的稳定性. 因此, 定义增益矩阵的可实现性和可行性概念:

定义 1 满足式(26)的增益矩阵 Φ_d 称为可实现增益

矩阵.

定义 2 确保闭环稳定性的可实现增益矩阵 Φ_d 称为可行增益矩阵.

本文结合上述初步分析, 拟解决的问题可描述为: 通过调节增益矩阵 Φ 来确定权重矩阵 Q, R 和预测时域 P_i 、控制时域 M_j 等控制器参数, 实现: 1) 保证闭环系统稳定性; 2) 闭环系统输出满足所需动态性能.

2 解析参数调优方法

2.1 闭环系统解耦分析

为了揭示可行增益矩阵 Φ_d 与控制器参数之间的定量关系, 需对多变量分数阶滞后闭环系统进行分析. 另外, 由于多变量系统输入输出之间存在着复杂的关联, 为了简化对闭环系统的分析, 须对闭环系统进行解耦.

令偏差项 $\mathbf{b}(n) = \mathbf{0}$, 此时系统未来输出预测值与模型未来预测输出值相同. 根据式(8)、式(19)和式(32), 可以得到:

$$\begin{aligned}P(z)D(z)K\mathbf{u}(n) &= P(z)D(z)K\mathbf{F}\mathbf{w}(n) - \\ &\quad P(z)D(z)\Phi KD(z)^{-1} \mathbf{y}_p(n) - \\ &\quad P(z)D(z)K\Phi MKZ(z)\mathbf{u}(n)\end{aligned}\quad (34)$$

基于式(34)可得:

$$\begin{aligned}(I + P(z)D(z)K\Phi D(z)^{-1} + \Phi MKZ(z)) \mathbf{y}_p(n) \\ = P(z)D(z)K\mathbf{F}\mathbf{w}(n)\end{aligned}\quad (35)$$

根据式(28)易得:

$$\mathbf{F} = K^{-1} + \Phi + \Phi M \quad (36)$$

定义回路增益矩阵 L 为

$$L = K\Phi = [l_{ij}], i, j=1, 2, \dots, m \quad (37)$$

通过对式(35)~式(37)进行相应的数学运算可以得到闭环系统模型:

$$\mathbf{y}_p(n) = \mathbf{G}_{cl}(z)\mathbf{w}(n) \quad (38)$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{cl}(z) &= D(z)(P(z)^{-1} + L + P(z)^{-1}LMZ(z))^{-1} \cdot \\ &\quad (I + L + LM)\end{aligned}\quad (39)$$

定理 1 在无有效约束和模型失配的条件下, 式(3)、式(4)所述多变量分数阶滞后系统的预测控制最优问题可转化为解耦的闭环传递函数矩阵中的极点配置问题:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{cl,d}(z) &= \text{diag}\left(\frac{\Delta_1}{z^{-(d_1+1)}(z-x_1)}, \frac{\Delta_2}{z^{-(d_2+1)}(z-x_2)}, \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{\Delta_m}{z^{-(d_m+1)}(z-x_m)}\right)\end{aligned}\quad (40)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Delta_i &= (1-a_i)(1+l_{ii}+l_{ii}(1-a_i)b_i a_i^{-1})[(1-b_i)z+b_i], \\ i &= 1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (41)$$

当回路增益矩阵取式(42)时, 式(40)成立:

$$\begin{aligned}L = K\Phi &= \text{diag}(l_{11}, l_{22}, \dots, l_{mm}) \\ l_{ii} &= \frac{a_i - x_i}{(1-a_i)(1-b_i + b_i a_i^{-1})}, i=1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (42)$$

证明 根据式(37)~式(39), 当 L 为对角矩阵时, 因式(39)中除 L 外也均为对角矩阵, 故闭环传递函数模型可

完全解耦.

式(40)中极点 x_i 的选取方法为: 根据系统所需调节时间 t_{s_i} 和 $4T_i + \theta_i = t_{s_i}$, 计算得时间常数 T_i , 最后通过式 $x_i = e^{-T_i/T_i}$ 即可获得所需极点.

2.2 参数调优公式

在无有效约束的前提下, 假设控制时域的步长为 1 时, 通过将模型预测控制调优问题转化为极点配置问题, 来推导模型预测控制器的参数解析调优公式, 以满足系统所需性能: 系统闭环稳定性及动态性能如调节时间等.

由闭环传递函数矩阵式(39)知, 通过适当地选取增益矩阵 Φ_d , 可使闭环传递函数达到所需形式. 另外, 根据式(37)可以得到所需回路增益矩阵 $L_d = K\Phi_d$.

考虑到式(26)、式(33)中控制时域的步长为 1, 易得:

$$\Phi = (R + S^T Q S)^{-1} S^T Q \bar{F}_y \quad (43)$$

根据式(17a)和式(17b), 可以得到:

$$S = EK = \text{diag}(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{mm})K \\ E_{ii} = (1 - b_i)[1 - a_i, 1 - a_i^2, \dots, 1 - a_i^{P_i}]^T + \\ b_i[0, 1 - a_i, \dots, 1 - a_i^{P_i-1}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (44)$$

定理 2 在无有效约束及模型失配的条件下, 式(3)、式(4)所述多变量一阶加分数阶滞后系统的预测控制调优问题所需闭环传递函数相对应的可实现回路增益矩阵 L_d 应满足不等式:

$$L_d < (E^T Q E)^{-1} E^T Q \bar{F}_y \quad (45)$$

其中, L_d 不仅需要满足式(45), 还需要通过朱利判据判断是否满足闭环系统(39)的稳定性^[20].

选择正定权重矩阵 R 作为调优参数, 则其满足上述回路增益矩阵 L_d 的调优公式:

$$R = K^T E^T Q (\bar{F}_y L_d^{-1} - E) K \quad (46)$$

证明 根据式(44), 可以得到:

$$S^T Q S = K^T E^T Q E K \quad (47)$$

利用式(43)及式(47), R 可以被规范化为

$$R = K^T \bar{R} K \quad (48)$$

所以根据式(43)、式(47)及式(48), 可以得到:

$$K^T (\bar{R} + E^T Q E) K \Phi = K^T E^T Q \bar{F}_y \\ \Rightarrow (\bar{R} + E^T Q E) = E^T Q \bar{F}_y L^{-1} \\ \Rightarrow \bar{R} = E^T Q (\bar{F}_y L^{-1} - E) \\ \Rightarrow R = K^T E^T Q (\bar{F}_y L^{-1} - E) K$$

又因为 R 是正定权重矩阵, 所以:

$$K^T E^T Q (\bar{F}_y L^{-1} - E) K > 0 \\ \Rightarrow E^T Q (\bar{F}_y L^{-1} - E) > 0 \\ \Rightarrow L < (E^T Q E)^{-1} E^T Q \bar{F}_y$$

需要强调的是, 本文所提出的调优方法不仅能够保证

被控系统的闭环稳定性, 还可使系统性能满足要求. 具体来讲, 首先通过朱利判据获得闭环系统式(39)的稳定条件, 并根据式(45)共同确定目标函数中加权函数的取值范围; 而后, 基于被控系统的性能需求(如调节时间), 通过极点配置确定能够满足所需性能的加权函数取值(见式(40)及其说明).

3 仿真实验

将多变量 pH 中和过程^[21]模型用作本文仿真模型, 其中酸性中和剂流的流量 $u_1(s)$ 和入口废水流的流量 $u_2(s)$ 作为控制变量, 输出口废水流的 pH 值 $y_1(s)$ 和储槽液位的高度 $y_2(s)$ 作为输出变量, 输出口废水流的工作范围从 pH=5.5 到 pH=7, 储槽液位的范围从 15 cm 到 20 cm. 被控过程的数学模型可以描述为

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} -0.47 \frac{e^{-36s}}{90s+1} & 0.47 \frac{e^{-36s}}{90s+1} \\ 0.95 \frac{1}{195s+1} & 0.95 \frac{1}{195s+1} \end{bmatrix}$$

当采样时间为 10 s 时, 其中滞后时间 36 s 经过离散后变为分数阶滞后, 得到模型:

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix} \\ G_{11}(z) = -0.47(1 - 0.8948) \frac{(1 - 0.6)z + 0.6}{z^4(z - 0.8948)} \\ G_{12}(z) = 0.47(1 - 0.8948) \frac{(1 - 0.6)z + 0.6}{z^4(z - 0.8948)} \\ G_{21}(z) = 0.95 \frac{1 - 0.95}{z - 0.95} \\ G_{22}(z) = 0.95 \frac{1 - 0.95}{z - 0.95}$$

现所需一个解耦闭环系统使得输出口处废水流的 pH 和储槽液位的高度的调节时间分别小于 285 s 和 250 s. 根据式(40)和式(41), 选择 $l_{11} = 0.3836$, $l_{22} = 2$, 令 $Q = I$. 所需回路增益矩阵 $L_d = \begin{bmatrix} 0.3836 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的可实现性条件可通过式(44)得到 $P_1 \leq 11$, $P_2 \leq 12$. 选择 $P_1 = P_2 = 5$, 根据式(45)

可得调优参数 $R = \begin{bmatrix} 0.5125 & -0.1984 \\ -0.1984 & 0.5125 \end{bmatrix}$.

为了展示所设计调优方法的有效性, 在 pH 输出添加方差为 0.000 1 的白噪声, 令输入约束为 $u_1(n) \geq 0$, $u_2(n) \leq 30$. 通过多变量 pH 中和过程仿真, 可得仿真结果如图 1 所示. 可以看出当两个输入分别为图 1(a)、图 1(b)时, 图 1(c)、图 1(d)的两个输出均能在要求的调节时间内快速无震荡地追踪参考目标. 此结果说明了该方法的有效性.

4 结论

本文针对各子系统由 FOPDT 描述的多变量分数阶滞后系统, 在无有效约束的条件下, 对多变量分数阶滞后系统进行了算法的详细推导, 针对一类常见分数阶系统,

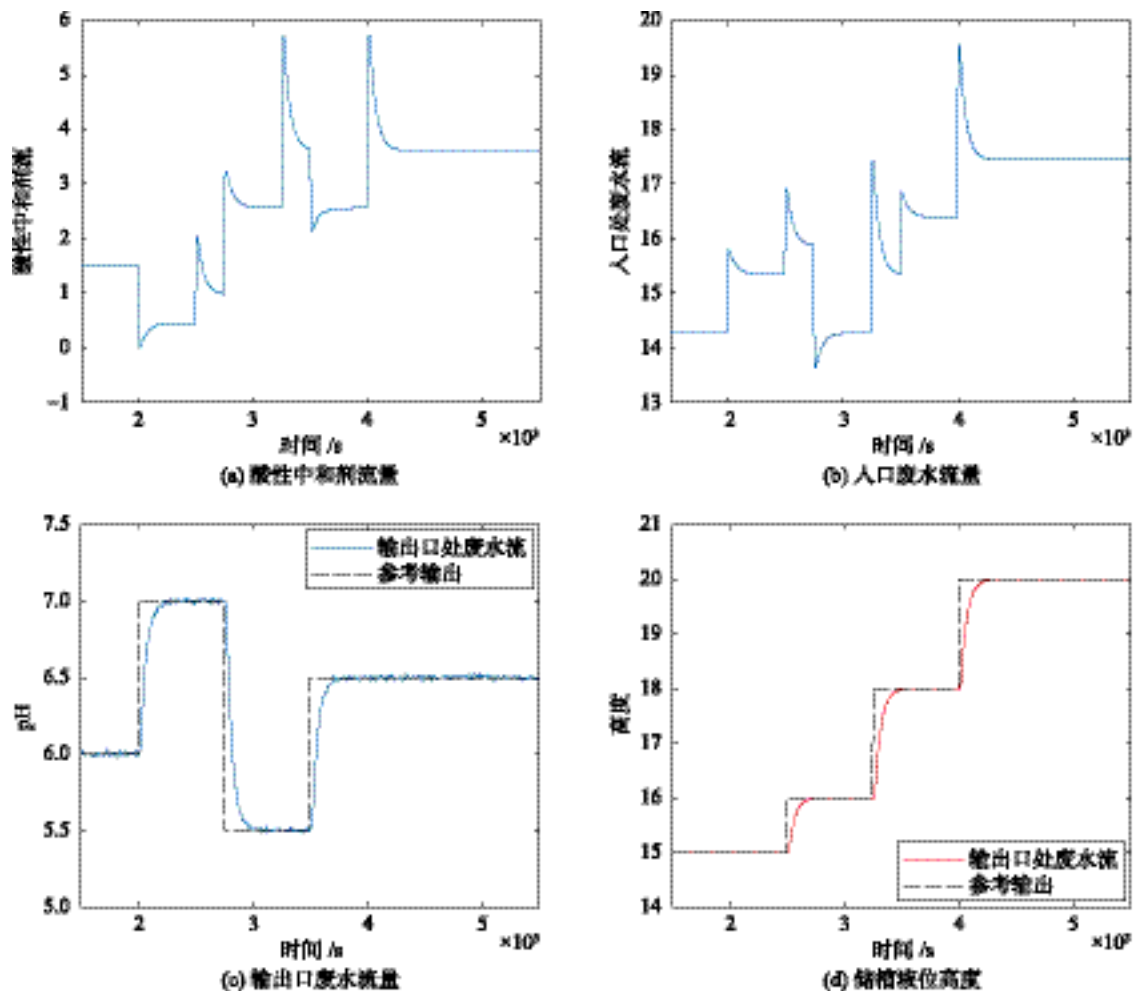


图1 多变量 pH 中和过程的闭环响应

Fig.1 Closed loop responses of the multivariable pHneutralization process

获得了系统的闭环传递函数及解耦条件,并推导出了能够满足闭环稳定性及动态性能的预测控制解析调优公式,确立了一种模型预测控制参数的解析调优方法.最后,通过

仿真实验验证了所提出调优方法的有效性.本文的研究结果为进一步研究一般多变量分数阶滞后系统的模型预测控制参数解析调优方法奠定了良好的基础.

参考文献

- [1] 陈虹. 模型预测控制[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 1-3.
Chen H. Model predictive control[M]. Beijing: Science Press, 2013: 1-3.
- [2] Darby M L, Nikolaou M. MPC: Current practice and challenges[J]. Control Engineering Practice, 2012, 20(4): 328-342.
- [3] Dai L, Gao Y, Xie L, et al. Stochastic self-triggered model predictive control for linear systems with probabilistic constraints[J]. Automatica, 2018, 92: 9-17.
- [4] Rawlings J B, Mayne D Q. Model predictive control: Theory and design[M]. 5th ed. Madison, WI: Nob Hill Publishing, 2015.
- [5] Lee J H. Model predictive control: Review of the three decades of development[J]. International Journal of Control Automation & Systems, 2011, 9(3): 415-424.
- [6] 余世明, 吴赛男, 何德峰. 传感器量程和行驶约束车辆队列模型预测控制[J]. 信息与控制, 2018, 47(1): 60-67.
Yu S M, Wu S N, He D F. Model predictive control of vehicle platoons subject to constraints on limited range of sensors and driving[J]. Information and Control, 2018, 47(1): 60-67.
- [7] 梁荣健, 张涛, 梁斌, 等. 面向多时延多频率测量信息的预测显示算法[J]. 机器人, 2017, 39(5): 715-723.
Liang R J, Zhang T, Liang B, et al. A predictive display algorithm for multi-time-delay multi-rate measurements[J]. Robot, 2017, 39(5): 715-723.
- [8] Abirami S, Kala H, Nevetha P B, et al. Performance comparison of different controllers for flow process[J]. International Journal of Engineering Research & Applications, 2014, 4(3): 17-21.

- [9] 袁平, 易凡, 肖宇航, 等. 面向攻角变化的风洞流场模型预测控制器[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 61–67.
Yuan P, Yi F, Xiao Y H, et al. Orienting of attack angle based model prediction controller of wind tunnel flow[J]. Control and Decision, 2018, 33(6): 61–67.
- [10] Venkatesan N, Anantharaman N. Controller design based on model predictive control for a nonlinear process[C]//8th International Symposium on Mechatronics and its Applications. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2012.
- [11] Sartipizadeh H, Vincent T L. A new robust MPC using an approximate convex hull[J]. Automatica, 2018, 92: 115–122.
- [12] Garriga J L, Soroush M. Model predictive control tuning methods: A review[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2010, 49(8): 3505–3515.
- [13] 席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制——现状与挑战[J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 222–236.
Xi Y G, Li D W, Lin S. Model predictive control – Status and challenges[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(3): 222–236.
- [14] 吴晓威, 张井岗, 赵志诚. 多变量系统的PID控制器设计[J]. 信息与控制, 2008, 37(3): 316–321.
Wu X W, Zhang J G, Zhao Z C. Design of a PID controller for multivariable systems[J]. Information and Control, 2008, 37(3): 316–321.
- [15] Shah G, Engell S. Tuning MPC for desired closed-loop performance for MIMO systems[C]//American Control Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 4404–4409.
- [16] Olesen D H, Huusom J K, Jogensen J B. A tuning procedure for ARX-based MPC[C]//IEEE Conference on Computer Aided Control System Design. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2013: 188–193.
- [17] Bagheri P, Khakisedigh A. Analytical approach to tuning of model predictive control for first-order plus dead time models[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(14): 1806–1817.
- [18] Bagheri P, Khakisedigh A. An analytical tuning approach to multivariable model predictive controllers[J]. Journal of Process Control, 2014, 24(12): 41–54.
- [19] Bagheri P, KhakiSedigh A. Closed form tuning equations for model predictive control of first-order plus fractional dead time models[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2015, 13(1): 73–80.
- [20] 胡寿松. 自动控制原理(第5版)[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 352–354.
Hu S S. The principle of automatic control[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2007: 352–354.
- [21] Henson M A, Seborg D E. Adaptive nonlinear control of a pH neutralization process[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002, 2(3): 169–182.

作者简介

贺利乐(1963–), 男, 博士, 教授, 博士生导师. 研究领域为过程控制, 智能控制.

姜依纯(1994–), 女, 硕士生. 研究领域为模型预测控制.

贺 宁(1989–), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师. 研究领域为预测控制, 鲁棒控制, 智能控制.

(上接第686页)

- [23] Xu Y, Li C, Wen X. Missing values estimation and consensus building for incomplete hesitant fuzzy preference relations with multiplicative consistency[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2018, 11(1): 101–119.
- [24] 徐选华, 王兵, 周艳菊. 基于信任机制的不完全信息大群体决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(4): 577–585.
Xu X H, Wang B, Zhou Y J. Method for large group decision making with incomplete decision preference information based on trust mechanism[J]. Control and Decision, 2016, 31(4): 577–585.

作者简介

徐选华(1962–), 男, 教授, 博士生导师. 研究领域为大数据决策理论与方法, 信息系统与决策支持系统, 应急管理
与决策, 风险分析与管理, 复杂工程决策方法等.

余艳粉(1993–), 女, 硕士生. 研究领域为大数据决策理论与方法, 应急管理与决策, 风险分析与管理.