

基于时延估计的扰动卡尔曼滤波器外力估计

吕涛¹, 杨芳艳¹, 李清都², 侯运锋², 陈程²

1. 上海理工大学机械工程学院, 上海 200093; 2. 上海理工大学机器智能研究院, 上海 200093

基金项目: 国家自然科学基金(61773083); 上海市浦江人才计划(2019PJD035); 上海市人工智能创新发展专项(2019-RGZN-01041)

通信作者: 李清都, liqd@usst.edu.cn 收稿/录用/修回: 2021-08-16/2021-09-28/2021-11-29

摘要

针对机械臂末端力估计存在模型误差及系统扰动等问题, 提出了一种基于时延估计的扰动卡尔曼滤波器外力估计法。在不使用额外力传感器的情况下, 通过电机驱动电流的测量, 采用时间延迟估计法设计出不需要精确动力学模型的估计器。将外力作为状态变量, 对系统的不确定性和扰动进行观测, 考虑机械臂动力学和扰动动力学, 设计出扰动卡尔曼滤波器来估计末端所受外力。使用 Matlab 仿真软件验证了该方法的有效性, 结果表明所提估计方法对具有测量噪声、模型误差及不确定性扰动的系统具有很好的鲁棒性。

关键词

机械臂
外力估计
时间延迟估计
扰动卡尔曼滤波
中图法分类号: TP241.2
文献标识码: A

External Force Estimation of Perturbed Kalman Filter Based on Time Delay Estimation

LYU Tao¹, YANG Fangyan¹, LI Qingdu², HOU Yunfeng², CHEN Cheng²

1. School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Institute of Machine Intelligence, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

Abstract

A disturbance Kalman filter external force estimation method based on time delay estimation is proposed to address the problems of model error and system disturbance in the end force estimation of the manipulator. In the case of no extra force sensor, the time delay estimation method is used to design an estimator that does not require an accurate dynamic model through the measurement of the drive motor current. The external force is then taken as the state variable to observe the uncertainty and disturbance of the system. A disturbance Kalman filter is designed considering the dynamics of the manipulator and the disturbance dynamics to estimate the external force on the end of the manipulator. The effectiveness of this method is verified by Matlab simulation software. Results show that the proposed estimation method has good robustness for the system with measurement noise, model error, and uncertainty disturbance.

Keywords

manipulator;
external force estimation;
time delay estimation;
disturbance Kalman filter

0 引言

随着机械臂技术的飞速发展, 机械臂已经在工业、服务业等诸多领域得到应用。机械臂在完成擦拭、去毛刺等任务时, 不仅需要位置控制, 还需要

力控制, 从而更好地与环境进行交互。如何获取机械臂的外力信息是力控制研究的关键。

通常, 力传感器用于获取机械臂末端执行器上的外力信息。然而, 使用力传感器不仅过于昂贵, 还使得系统设计过于复杂。在高温、高压和潮湿环

境下,力传感器的使用会严重影响系统的控制精度和鲁棒性。针对上述问题,如何不通过力传感器来获取外力信息已经成为了当今研究的热点^[1-2]。

目前,学术界已经提出了许多外力估计方法。文[3]提出了一种基于扰动观测器的力估计方法,文[4]提出了一种基于滑模扰动观测器的外力估计方法。文[5]提出了基于非线性扰动观测器估计外力的方法,但对测量噪声和模型误差等不确定性因素比较敏感,无法提供准确的估计结果。文[6]提出了一种非线性干扰观测器来估计关节摩擦力和连杆力,而无需测量关节加速度。文[7]提出了依靠电机信号,将电机模型简化结合机械臂的动力学模型提出外力估计的方法,进而实现主动柔顺的控制需求。文[8]提出采用电机信号(电流、关节角度和关节速度),基于卡尔曼滤波来估计外力和力矩的方法。该方法依赖于串联机械臂的动态模型,只能以离线方式进行状态估计。

由于机械臂的特殊驱动方式,动力学建模和求解非常困难。为了克服这一限制,文[9]开发了不需要精确动力学模型的机械臂估计器。采用同时输入和状态估计方法,不仅可以抑制机械臂动力学的非线性不确定性,还可以抑制测量噪声。文[10]提出了一种基于时间延迟估计(time delay estimation, TDE)的方法来获取不精确动力学模型,该方法假设非线性动态是连续的或分段连续的且时间延迟足够小,在较小的采样时间内系统动力学不发生变化,关节扭矩传感器测量的信息可用于提取系统的外力。对于外力输入未知的非线性随机系统,文[11]提出了一种克服机械臂非线性不确定性的方法。文[12]比较了广义动量观测器、扩展状态观测器、改进扩展状态观测器和闭环扰动观测器的实验结果。实验结果表明,改进的扩展状态观测器在接触力估计中具有最好的估计性能。文[13]利用对电机电流的测量,提出了一种基于非线性最小二乘回归的参数辨识方法来辨识电机参数和摩擦转矩模型以提高力估计的精度。

综合考虑上述问题,针对机械臂存在的模型误差、测量噪声以及系统扰动等因素影响,本文将时间延迟估计与扰动卡尔曼滤波器(disturbance Kalman filter, DKF)相结合,提出了一个基于时延估计的扰动卡尔曼滤波器。采用时间延时估计来简化机械臂动力学模型,设计出不需要精确动力学模型的估计器。同时,利用扰动卡尔曼滤波器对系统的不确定和系统扰动进行观测,将外力视为机械臂的未

知输入作为系统状态变量,将扰动动力学模型加入到时变离散线性系统中。实验对象为四自由度机械臂。通过仿真验证了该方法的有效性和可行性。

1 机械臂动力学模型

1.1 关节驱动力矩

机械臂在工作空间内的运动是依靠关节驱动力矩和电机转子转角来确定的^[14],机械臂的关节驱动力矩是驱动电机的负载转矩通过减速机作用在驱动连杆上。

图1描绘了通过齿轮驱动器驱动单个连杆的直流电机的示意图,其中 $v_a(t)$ 为施加电压(V), K_a 是电压增益常数, $i_s(t)$ 为瞬时电枢电流(A); L_a 电枢感应强度(H); J_m 为转动惯性($\text{kg}\cdot\text{m}^2$); R_a 为电枢电阻(Ω); B_m 为黏滞摩擦系数($\text{N}\cdot\text{m}/(\text{rad}/\text{s})$); K_g 为齿轮传动比; η 为电机的传动效率; θ_m 为电机轴位置(rad); $\theta = \theta_m/K_g$,为关节角位置(rad); K_t 为电机转矩常数($\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$)。单连杆电机的动力学方程为 $K_a v_a - K_g \tau_m = B_m \dot{\theta} + J_m \ddot{\theta}$, τ_m 是电机在关节处施加的力矩矢量。

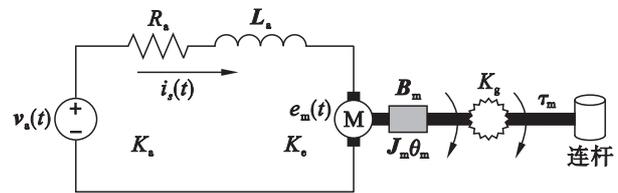


图1 电机驱动单连杆结构图

Fig.1 Motor drive single link structure diagram

在 n 自由度机械臂的结构中,第 i 个关节处的驱动力矩 $\tau_{m,i}$ 可表示为

$$\tau_{m,i} = K_g \eta (K_t i_s - B_m \dot{\theta} - J_m \ddot{\theta}) \quad (1)$$

1.2 摩擦扭矩模型

机械臂系统的摩擦模型有很多种,本机械臂考虑了库仑摩擦和黏滞摩擦。

库仑摩擦^[15]是指静摩擦力与负载力成正比,与速度的符号相反,与接触面积无关。库仑摩擦力矩 τ_{cou} 可以表达为

$$\begin{aligned} \tau_{\text{cou},i}(\dot{q}_i) &= \xi_i \sigma_i F_{N,i} \text{sgn} \dot{q}_i \\ &= C_{c,i} \text{sgn} \dot{q}_i \\ &= \begin{cases} -C_{c,i}, & \dot{q}_i < 0 \\ 0, & \dot{q}_i = 0 \\ C_{c,i}, & \dot{q}_i > 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

其中, $i=1, 2, \dots, N$, $\sigma_i F_{N,i}$ 为第 i 个关节的摩擦系数和载荷力, ξ_i 是第 i 个关节的库仑摩擦力与扭矩的

转换系数, $C_{c,i} = \xi_i \sigma_i F_{N,i}$ 为库仑摩擦力矩系数。

为了避免因零速度的频繁检测而引起的仿真问题, 可以在 \dot{q}_i 附近设置 $\dot{q}_i = 0$ 的死区, 即 $|\dot{q}_i| \leq \delta$ 。

黏性摩擦与相对旋转速度有关。黏性摩擦力矩系数为 C_v , $\tau_{vis} = C_v \dot{q}$ 是黏性摩擦力矩。

综上关节 i 摩擦力矩矢量 $\tau_{f,i}$ 可以表示为

$$\tau_{f,i} = \tau_{con,i} + \tau_{vis,i} \quad (3)$$

1.3 完整机械臂动力学

机械臂的动力学模型方程可由牛顿-欧拉方程计算得:

$$\tau_m = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_d - J^T(q)F_{ext} \quad (4)$$

式中, (q, \dot{q}, \ddot{q}) 分别代表关节角、关节速度和关节加速度; $M(q)$ 是机械臂的正定惯性矩阵; $G(q)$ 是重力矢量; τ_d 表示所有其他未建模力矩, 包括摩擦力、非线性不确定性导致的未知扰动力矩等; $C(q, \dot{q})\dot{q}$ 为哥氏力矢量和离心力矩; $J(q)$ 是机械臂的雅可比矩阵; F_{ext} 是作用在机械臂末端执行器上的外力矢量, 这里用基础坐标系表示, 其中包括接触力 F_x, F_y, F_z 和接触力矩 n_x, n_y, n_z , 定义为 $F_{ext} = [F_x, F_y, F_z, n_x, n_y, n_z]^T$ 。

根据式(1)~式(3), 可得到完整的机械臂动力学模型方程:

$$\tau_m = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_f + \tau_d - J^T(q)F_{ext} \quad (5)$$

2 外力估计方法

2.1 基于时延估计的动力学模型

在实际应用中会受到外界时变因素干扰, 准确地获取动力学扰动模型参数是比较困难的^[16]。只有在对机械臂模型进行估计后才能进行控制器设计^[17]。因此, 有必要研究非线性不确定系统的估计技术。本文采用时间延迟估计方法来估计机械臂动力学模型, 利用系统变量的时间延迟信号来估计当前系统的模型参数。方法的推导过程说明如下:

为简便起见, 令 $H(q, \dot{q}, \ddot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$, $\tau_{ext} = J^T(q)F_{ext}$, 将式(5)改写为

$$\tau_{ext} = M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_d + \tau_f - \tau_m \quad (6)$$

令 $\bar{H} = (M(q) - \bar{M})\ddot{q} + H(q, \dot{q}, \ddot{q})$, 机械臂的动态方程式(6)可以表示为

$$\tau_{ext} = \bar{M}\ddot{q} + \bar{H} + \tau_d + \tau_f - \tau_m \quad (7)$$

常数矩阵 \bar{M} 是对 M 的估计。将方程(7)改写为时变方程式:

$$\tau_{ext}(t) = \bar{M}\ddot{q}(t) + \bar{H}(t) + \tau_d(t) + \tau_f(t) - \tau_m(t) \quad (8)$$

引入 t_s 作为系统的时间延迟, τ_{ext} 前一刻

$t - t_s$ 的值为

$$\tau_{ext}(t - t_s) = \bar{M}\ddot{q}(t - t_s) + \bar{H}(t - t_s) + \tau_d(t - t_s) + \tau_f(t - t_s) - \tau_m(t - t_s) \quad (9)$$

式(8)和式(9)相减得:

$$\tau_{ext}(t) = \tau_{ext}(t - t_s) + \bar{M}(\ddot{q}(t) - \ddot{q}(t - t_s)) + \bar{H}(t) - \bar{H}(t - t_s) + \tau_d(t) - \tau_d(t - t_s) + \tau_f(t) - \tau_f(t - t_s) - (\tau_m(t) - \tau_m(t - t_s)) \quad (10)$$

令 $\omega(t) = \tau_d(t) - \tau_d(t - t_s) + \tau_f(t) - \tau_f(t - t_s)$ 为由扰动转矩、非线性不确定性等因素引起的系统噪声。

式(10)可以用式(11)代替:

$$\tau_{ext}(t) = \tau_{ext}(t - t_s) + \bar{M}d(t) + \bar{H}(t) - \bar{H}(t - t_s) + \omega(t) \quad (11)$$

式中, $d(t) = \ddot{q}(t) - \ddot{q}(t - t_s) - \bar{M}^{-1}(\tau_m(t) - \tau_m(t - t_s))$ 表示为式(11)未知输入的函数, 在这里, 外力被认为是影响机械臂运动性能的未知输入。

令 $M^* = [\bar{M}, I]$, $u(t) = [d(t), \bar{H}(t) - \bar{H}(t - t_s)]^T$, 简化式(11)得到:

$$\tau_{ext}(t) = \tau_{ext}(t - t_s) + M^*u(t) + \omega(t) \quad (12)$$

由于机械臂是由一个数字处理器控制的, 如果控制器的采样时间为 t_s , 那么动态方程式(11)可变为

$$\tau_k = \tau_{k-1} + M^*u_k + \omega_k \quad (13)$$

引入 y_k 为 k 时刻关节系统观测模型信号:

$$y_k = \tau_k + v_k \quad (14)$$

其中, v_k 是观测噪声符合高斯分布。

式(13)和式(14)联立得线性系统:

$$\begin{cases} \tau_k = \tau_{k-1} + M^*u_k + \omega_k \\ y_k = \tau_k + v_k \end{cases} \quad (15)$$

在观测器的设计中, 将不精确机械臂的动力学模型和扰动的动力学模型结合成一个复合系统模型。然后, 基于复合系统模型, 设计了一个考虑不确定性模型误差和测量噪声的基于时延估计扰动卡尔曼滤波器。

2.2 扰动卡尔曼滤波器

为了估计施加在机械臂末端执行器上的外力。将外力作为状态变量, 对系统的不确定性和扰动进行观测, 与卡尔曼滤波一样, 可以实现准确的估计, 对不确定性系统的具有很好的鲁棒性。

基于2.1节推导的时延估计动力学模型, 将其离散化引入时变离散时间线性系统, 将扰动观测器理论应用到离散时间线性系统中:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (16)$$

式中, \mathbf{x}_k 为 k 时刻与关节力矩相关的系统状态变量, \mathbf{u}_k 为 k 时刻系统的输入, \mathbf{y}_k 为系统 k 时刻的观测值, 其中包含电机传感器相关信息; $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{M} \ \mathbf{I}]$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ 为系统矩阵, \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 分别为外界干扰引起的过程噪声和测量噪声, 均是不相关零均值的高斯分布。

定义时间 k 的误差协方差矩阵 \mathbf{P}_k : 根据确定性线性系统的观测器理论^[18], 设计状态估计器, 可以对新估计值写一个更新方程, 从而将旧估计值与测量数据结合起来:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \bar{\mathbf{x}}_k) \quad (17)$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}_k$ 被称为先验估计, $\hat{\mathbf{x}}_k$ 被称为后验估计, \mathbf{K}_k 被称为卡尔曼增益, $\mathbf{h}(\cdot)$ 被称为测量预测函数。先验估计通过使用前一时间步长和当前输入的状态估计来预测当前状态。

卡尔曼滤波器中的状态测量和方程是线性化的状态估计, 过滤的两个主要步骤是: 预测和更新。对于预测, 状态转移矩阵 \mathbf{A}_{k-1} 被计算为状态函数矩阵, 在之前的状态估计下取值。观测矩阵 \mathbf{H} 作为函数 $\mathbf{h}(\cdot)$ 关于状态向量 \mathbf{x}_k 的矩阵计算。下标 $k|k-1$ 是时间 k 的计算, 给定时间 $k-1$ 的其他值 $k-1|k-1$ 也是如此。基于扰动的卡尔曼滤波算法如图 2 所示。

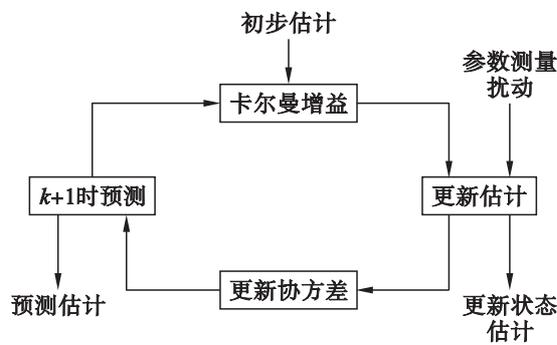


图 2 扰动卡尔曼滤波器算法流程图

Fig.2 Flow chart of perturbed Kalman filter algorithm

要实现此方法, 首先需要对其进行初始化。假设机械臂处于静止状态, 没有外力, 取 $\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{I}$, $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ 。将矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} 参数化后, 每一时刻执行以下步骤。

1) 状态预测: 状态预测矩阵和协方差矩阵通过上一时刻步长计算:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{W}_{k-1} \\ \mathbf{W}_k = \mathbf{M}_k \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{e}_{k-1} \end{cases} \quad (18)$$

式中, \mathbf{W}_k 为与过程噪声相关的系统矩阵, \mathbf{M}_k 为马尔可夫随机场, \mathbf{e}_k 为高斯分布噪声矩阵。

2) 增益调节: 对预测误差的协方差矩阵进行修正:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1} = \mathbf{S}(\mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (19)$$

其中, \mathbf{S} 为增益调度算子。

3) 测量创新: 从测量值及其协方差矩阵得到创新点:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\mathbf{P}}_k = \mathbf{H}_{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T + \mathbf{V}_k \end{cases} \quad (20)$$

4) 估计更新: 利用协方差矩阵进行滤波增益及状态估计:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \hat{\mathbf{P}}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{Y}}_k \\ \mathbf{P}_{k|k} = (\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{V}_k \mathbf{H}_k)^{-1} \end{cases} \quad (21)$$

5) 估计外力 \mathbf{F}_{ext} :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}, k} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{x}_k \quad (22)$$

重复以上步骤即可通过式 (22) 计算出估计的外部接触力 \mathbf{F}_{ext} 。

2.3 稳定性分析

基于扰动输入和状态估计设计的扰动卡尔曼滤波外力估计器, 其过程噪声的协方差矩阵 \mathbf{Q} 和测量噪声的协方差矩阵 \mathbf{R} 共同决定了该方法的稳定性。本文将使用这些值来调整观测器的准确度和响应^[19], 但还需要对估计量进行收敛稳定性分析。具体证明如下:

构建扰动的系统状态模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k \mathbf{u} + \mathbf{d}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{c} \mathbf{x}_k + \mathbf{v} \end{cases} \quad (23)$$

其中, \mathbf{a}_k 和 \mathbf{b}_k 假定为系统参数, 扰动项 $\mathbf{d}_k = (\mathbf{a} - \mathbf{a}_k) \mathbf{x}_k + (\mathbf{b} - \mathbf{b}_k) \mathbf{u} + \mathbf{w}$ 用于补偿外部扰动和模型的不确定性。

现在构造一个扩展的状态向量 $\mathbf{z}_k = [\mathbf{x}_k \ \mathbf{d}_k]^T$, 并假设扰动项为 0, 即:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_k \\ \dot{\mathbf{d}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 为与干扰过程相关的白噪声。式 (24) 可以用附加的状态向量 \mathbf{z}_k 表示:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = [\mathbf{c} \ \mathbf{0}] \mathbf{z}_k + \mathbf{v} \end{cases} \quad (25)$$

现在把干扰项 \mathbf{d}_k 加到原系统状态 \mathbf{x} 上, 设 $\mathbf{z}_k = [\mathbf{x} \ \mathbf{d}_k]^T$ 。原系统方程可以用附加的状态向量 \mathbf{z} 表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad (26)$$

可得:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w} \\ \mathbf{y} = [\mathbf{c} \ 0]\mathbf{z} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (27)$$

尽管扰动项未知, 假设过程噪声 \mathbf{w}_k 和测量噪声 \mathbf{v} 具有一定的随机性质, 但可以在反馈环路中实现卡尔曼滤波器的最优估计, 从噪声测量值中估计系统状态和扰动项。估计器的动力学模型可以写成:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_k \mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (28)$$

其中, \mathbf{K} 为卡尔曼增益, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}$ 为估计输出。

设 $\mathbf{H} = [\mathbf{c} \ 0]$, 则 $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{v}$, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{z}}$, 估计量

可以写为 $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_k \mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{H}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{v}$ 。

控制目标是获得被控对象的渐近稳定性, 实现这种形式的控制律为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -k_k & -\frac{1}{b_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{d}}_k \end{bmatrix} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} \quad (29)$$

其中, k_k 为反馈增益保证系统渐近稳定, $1/b_k$ 保证完全消除干扰项并补偿外部干扰和模型不确定性。

将控制律代入被控对象的动力学中, 可得:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{w} \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_k \mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{H}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{v} \end{cases} \quad (30)$$

定义误差动力学为 $\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}}$ 可得:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{w} - \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{B}_k \mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{K}\mathbf{H}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{F} - \mathbf{F}_k)\mathbf{z} + \mathbf{F}_k(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_k)\mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} - \\ &\quad \mathbf{K}\mathbf{H}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{w} - \mathbf{v} \\ &= \Delta\mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{F}_k \tilde{\mathbf{z}} + \Delta\mathbf{B}\mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{K}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{w} - \mathbf{v} \end{aligned} \quad (31)$$

两个零均值噪声项 \mathbf{w} 和 \mathbf{v} 可以合并为一个项 \mathbf{v} , 将卡尔曼增益 $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}$ 代入后, 误差动力学可重写为

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = (\mathbf{F}_k - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})\tilde{\mathbf{z}} + \Delta\mathbf{F}\mathbf{z} + \Delta\mathbf{B}\mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v} \quad (32)$$

其中, \mathbf{P} 为卡尔曼滤波器的误差协方差矩阵:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}_k\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}_k^T - \\ &\quad \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (33)$$

其中, \mathbf{Q} 是测量噪声协方差, \mathbf{Q} 是过程噪声协方差。由于 $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k^{-1}$ 的时间导数为 0, 即:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k^{-1}) = \dot{\mathbf{P}}_k\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{P}_k\dot{\mathbf{P}}_k^{-1} = 0 \quad (34)$$

解得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_k^{-1} &= -\mathbf{P}_k^{-1}\dot{\mathbf{P}}_k\mathbf{P}_k^{-1} \\ &= -\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^T\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}_k^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

现构建李雅普诺夫函数:

$$\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{z}}_k) = \tilde{\mathbf{z}}_k^T\mathbf{P}_k^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_k \quad (36)$$

想要保证所设计方案的渐近稳定性, 首先就要满足 $\tilde{\mathbf{z}}$ 渐近收敛于 0, 即构造的李雅普诺夫函数 $V(\tilde{\mathbf{z}}_k)$ 是一个递减函数, $\tilde{\mathbf{z}}$ 在存在确定参数和外部扰动的情况下可以渐近收敛到 0。其证明过程如下:

收敛分析需要进行近似计算:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{k+1} \approx \mathbf{H}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1|k} \\ \tilde{\mathbf{z}}_{k+1|k} \approx \mathbf{F}_k\tilde{\mathbf{z}}_k \end{cases}$$

引入对应的状态误差分量矩阵:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{ik+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \boldsymbol{\alpha}_{ik+1} \\ \mathbf{e}_{ik+1}\tilde{\mathbf{z}}_{jk+1|k} = \boldsymbol{\beta}_{jk}\mathbf{F}_{jk}\tilde{\mathbf{z}}_k \end{cases}$$

通过近似计算及前文更新估计算法可以得出:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{z}}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{H}_{k+1}^T(\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k} \cdot \\ \quad \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}\mathbf{e}_{k+1} \\ \mathbf{P}_{k+1}^{-1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1} \end{cases} \quad (37)$$

将式(37)代入(36)可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}) &= \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T\mathbf{P}_{k+1}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} \\ &= \mathbf{V}_{k+1|k} + \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \\ &\quad \mathbf{e}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{e}_{k+1} \end{aligned} \quad (38)$$

由假设近似条件式(38)可重写为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{k+1} &= \mathbf{V}_{k+1|k} + \mathbf{e}_{k+1}^T(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \boldsymbol{\alpha}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1} - \\ &\quad \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} + \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1})\mathbf{e}_{k+1} \end{aligned} \quad (39)$$

若要使 $V(\tilde{\mathbf{z}}_k)$ 是一个递减函数, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{V}_k &= \mathbf{e}_{k+1}^T(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \boldsymbol{\alpha}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1} - \\ &\quad \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} + \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1}) \cdot \\ &\quad \mathbf{e}_{k+1} + \tilde{\mathbf{x}}_k^T(\mathbf{F}_k\boldsymbol{\beta}_k(\mathbf{F}_k\mathbf{P}_k\mathbf{F}_k^T)^{-1}\boldsymbol{\beta}_k\mathbf{F}_k - \mathbf{P}_k^{-1})\tilde{\mathbf{x}}_k \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

则只需满足不等式(41), 便可证明其为递减函数。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \boldsymbol{\alpha}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1} - \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} + \\ \quad \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{R}_{k+1}^{-1} \\ \leq 0 \\ \mathbf{F}_k^T\boldsymbol{\beta}_k(\mathbf{F}_k\mathbf{P}_k\mathbf{F}_k^T)^{-1}\boldsymbol{\beta}_k\mathbf{F}_k - \mathbf{P}_k^{-1} \leq 0 \end{cases} \quad (41)$$

假设系统是可观的, 式(27)可重新构造为

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{O}_k^T(k-N, k)\mathbf{z}_k \quad (42)$$

由于 \mathbf{F}_k 是有界非奇异矩阵, 由此存在正实数 η_1 和 η_2 , 使得对于所有 $k \geq N$, 有 Gramian 矩阵不等式:

$$\eta_1\mathbf{I}_N \leq \mathbf{L}_{k-N}(\mathbf{O}, \mathbf{R}) \leq \eta_2\mathbf{I}_N \quad (43)$$

其中, $\mathbf{L}_{k-N}(\mathbf{O}, \mathbf{R}) = \mathbf{O}_k^T(k-N, k)\mathbf{R}_k(k-N, k)\mathbf{O}_k \cdot (k-N, k)$ 。

通过上述分析系统是可观的, 可推出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{P}_k^{-1}) = \infty \quad (44)$$

$$\sup \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_k^{-1})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_k^{-1})} < \infty \quad (45)$$

由式(37)和 F_k 为有界非奇异矩阵归纳可以得出:

$$P_{k+1}^{-1} = L_{k+1}(\mathbf{O}, \mathbf{R}) + \boldsymbol{\psi}(0, k) \quad (46)$$

其中,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(0, k) &= (\mathbf{F}_K^{-k-1})^T \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{F}_K^{-k-1} \\ L_{k+1}(\mathbf{O}, \mathbf{R}) &= \mathbf{O}_k^T(1, k+1) \mathbf{R}_k(1, k+1) \cdot \\ &\quad \mathbf{O}_k(1, k+1) \end{aligned}$$

在有界时间 kN 内, 如果可重构 Gramian 矩阵可分解为 k 块矩阵, 可以得出:

$$P_{kN}^{-1} = \sum_{i=1}^k [\mathbf{O}_e^T((i-1)N+1, iN) \mathbf{R}((i-1)N+1, iN) \cdot \mathbf{O}_e((i-1)N+1, iN)] + \boldsymbol{\psi}(0, kN-1) \quad (47)$$

其中, $P_{kN}^{-1} - \boldsymbol{\psi}(0, kN-1)$ 为 Gramia 矩阵的分块可重构之和。

由式(43)可以得出 $\lambda(P_{kN}^{-1} - \boldsymbol{\psi}(0, kN-1))$ 是有界的, 即:

$$0 < k\eta_1 \leq \lambda(P_{kN}^{-1} - \boldsymbol{\psi}(0, kN-1)) \leq k\eta_2 \quad (48)$$

其中, λ 是 $P_{kN}^{-1} - \boldsymbol{\psi}(0, kN-1)$ 的特征值。

由前文所证 $V(\tilde{\mathbf{z}}_k)$ 是递减函数可以得出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = V \quad (49)$$

即

$$\frac{V_k}{\text{tr}(P_k^{-1})} \geq \frac{\lambda_{\min}(P_k^{-1}) \tilde{\mathbf{z}}_k^T \tilde{\mathbf{z}}_k}{n \lambda_{\max}(P_k^{-1})} \geq 0 \quad (50)$$

由式(44)可以得到

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(P_k^{-1}) = \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{\min}(P_k^{-1}) \tilde{\mathbf{z}}_k^T \tilde{\mathbf{z}}_k}{n \lambda_{\max}(P_k^{-1})} = 0 \end{cases} \quad (51)$$

因此, 设计的控制系统误差动力学在有限时间内趋于 0:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}_k = 0 \quad (52)$$

综上所述, 证明了所设计的控制系统的收敛性。

对构建的李雅普诺夫函数对其时间进行求导, 证其渐近稳定性:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{z}}_k) &= \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{z}}^T \dot{\mathbf{P}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \\ &= 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \tilde{\mathbf{z}}^T \dot{\mathbf{P}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} \\ &= 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} ((\mathbf{F}_k - \mathbf{P}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{z}} + \Delta \mathbf{F} \mathbf{z} + \\ &\quad \Delta \mathbf{B} \mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\nu}) + \tilde{\mathbf{z}}^T (-\mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^T \mathbf{P}_k^{-1} + \\ &\quad \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}_k^{-1}) \tilde{\mathbf{z}} \\ &= -\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{z}} + 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{F} \mathbf{z} + 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{B} \mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} + \\ &\quad 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\nu} - \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (53)$$

若要使 $V(\tilde{\mathbf{z}}_k)$ 为渐近稳定, 则其导数为负定。具体对上式而言, $\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{z}}$ 和 $\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}$ 为正定矩阵。在现实中, 根据传感器精度可以轻松的确

定测量的噪声协方差 \mathbf{R} , 使 $\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}$ 补偿式(37)中的所有正数项, 即 $2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{F} \mathbf{z} + 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{B} \mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} + 2\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\nu} \leq \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}$, 则 $V(\tilde{\mathbf{z}}_k)$ 可保证为负定。上述不等式可改写为

$$2\|\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{F} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{B} \mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\nu}\| \leq \|\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}\| \quad (54)$$

利用三角函数不等式得:

$$\begin{aligned} &2\|\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{B} \mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\nu}\| \\ &\leq 2\|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{F}\| \|\mathbf{z}\| + 2\|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \cdot \\ &\quad \|\Delta \mathbf{B}\| \|\mathbf{S}\| \|\hat{\mathbf{z}}\| + 2\|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\boldsymbol{\nu}\| \|\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}\| \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\tilde{\mathbf{z}}\| \end{aligned} \quad (55)$$

若要使 $\dot{V}(\tilde{\mathbf{z}}_k) \leq 0$ 成立, 那么必须保证不等式(56)成立:

$$\begin{aligned} &2\|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{F}\| \|\mathbf{z}\| + \\ &2\|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{B}\| \|\mathbf{S}\| \|\hat{\mathbf{z}}\| + \\ &2\|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\boldsymbol{\nu}\| \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{z}}^T\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\tilde{\mathbf{z}}\| \end{aligned} \quad (56)$$

化简得:

$$2\|\Delta \mathbf{F}\| \|\mathbf{z}\| + 2\|\Delta \mathbf{B}\| \|\mathbf{S}\| \|\hat{\mathbf{z}}\| + 2\|\boldsymbol{\nu}\| \leq \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\tilde{\mathbf{z}}\| \quad (57)$$

由式(57)可知, 卡尔曼滤波扰动适应控制策略渐近稳定的必要条件变为

$$\|\mathbf{Q}\| \geq (2\|\Delta \mathbf{F}\| \|\mathbf{z}\| + 2\|\Delta \mathbf{B}\| \|\mathbf{S}\| \|\hat{\mathbf{z}}\| + 2\|\boldsymbol{\nu}\|) (\|\mathbf{P}^{-1}\| \|\tilde{\mathbf{z}}\|)^{-1} \quad (58)$$

根据李雅普诺夫稳定性判据, 基于时延估计的卡尔曼滤波器外力估计器总是渐近稳定的。

3 仿真实验

3.1 仿真参数设定

第 2 节推导的外力估计方法适用多自由度机械臂模型, 为了方便验证所提外力估计方法的有效性, 本实验以一台四自由度机械臂为实验对象, 进行末端外力估计的仿真分析。采用 SolidWorks 建立机械臂物理模型, 获取相关物理参数, 建立旋转轴及坐标变换关系, 将模型导入到 Matlab/Simulink 仿真软件进行环境搭建^[20]。机械臂模型如图 3 所示。表 1 显示了 DH 相关参数。

图 3 中机械臂系统的动力学模型公式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_m &= \mathbf{M}(q) \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \mathbf{G}(q) + \\ &\quad \boldsymbol{\tau}_f + \boldsymbol{\tau}_d - \mathbf{J}^T(q) \mathbf{F}_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (59)$$

其中:

$$\mathbf{M}(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) & M_{14}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) & M_{24}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) & M_{34}(q) \\ M_{41}(q) & M_{42}(q) & M_{43}(q) & M_{44}(q) \end{bmatrix}$$

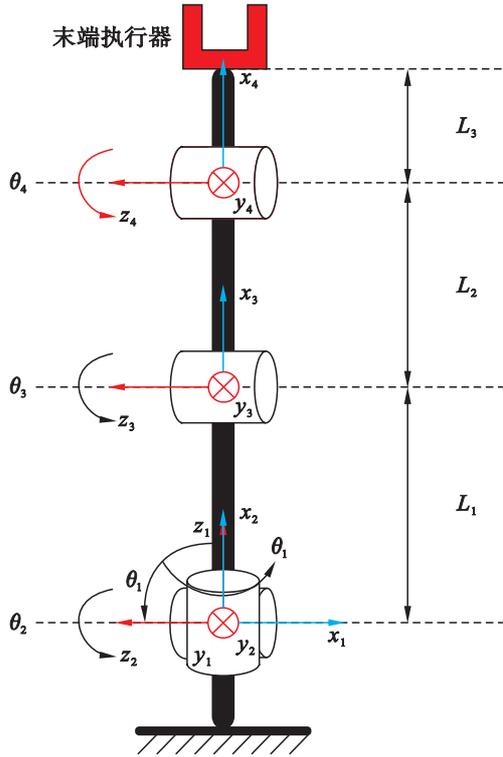


图3 四自由度机械臂结构

Fig.3 Four degrees of freedom manipulator structure

表1 四自由度机械臂的 DH 参数

Tab.1 DH parameters of a 4-DOF manipulator

关节	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$\pi/2$	0	0	θ_2
3	0	L_1	0	θ_3
4	0	L_2	0	θ_4
5	0	0	L_3	0

$$C(q) = \begin{bmatrix} C_{11}(q) & C_{12}(q) & C_{13}(q) & C_{14}(q) \\ C_{21}(q) & C_{22}(q) & C_{23}(q) & C_{24}(q) \\ C_{31}(q) & C_{32}(q) & C_{33}(q) & C_{34}(q) \\ C_{41}(q) & C_{42}(q) & C_{43}(q) & C_{44}(q) \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(a_{11}s_2 + a_{12}s_{23} + a_{13}s_{234}) \\ -g(a_{12}s_{23} + a_{13}s_{234}) \\ -g(a_{13}s_{234}) \end{bmatrix}$$

$$M_{11}(q) = a_1 + a_2s_2^2 + a_3s_{23}^2 + a_4s_{234}^2 + 2a_5s_2s_{23} + 2a_6s_2s_{234} + 2a_7s_{23}s_{234}$$

$$M_{12}(q) = M_{13}(q) = M_{14}(q) = M_{21}(q) = M_{31}(q) = M_{41}(q) = 0$$

$$M_{22}(q) = a_2 + a_3 + a_4 + a_8 + a_9 + a_{10} + 2a_5c_3 + 2a_6c_{34} + 2a_7c_4$$

$$M_{23}(q) = M_{321}(q) = a_3 + a_4 + a_9 + a_{10} + a_6c_{34} + 2a_7c_4$$

$$M_{24}(q) = M_{42}(q) = a_4 + a_{10} + a_6c_{34} + a_7c_4$$

$$M_{33}(q) = a_3 + a_4 + a_9 + a_{10} + 2a_7c_4$$

$$M_{34}(q) = a_4 + a_{10} + a_7c_4$$

$$M_{43}(q) = a_4 + a_{10} + a_7c_4$$

$$M_{44}(q) = a_4 + a_{10}$$

机械臂初始位置 $[q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$, 其模型参数如表2所示。取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 式中模型参数 $a_1 \sim a_{10}$ 的数值如表3所示。 $M(q)$ 的4个特征值在应用中可适当调整来优化系统性能, 合理相关配置参数。引入幅值10%的高斯白噪声来模拟环境中的摩擦因素, 利用前面所提方法, 进行下面的仿真实验并分析。

表2 机械臂的模型参数

Tab.2 The model parameters of the manipulator

连杆	长度 /m	质量 /kg	摩擦系数	质心间距 /m	转动惯量 /($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
1	0.45	4.40	0.5	0.30	0.110
2	0.30	2.30	0.4	0.15	0.250
3	0.15	1.70	0.3	0.10	0.230

表3 机械臂的模型相关参数

Tab.3 The model parameters of the manipulator

参数	量值	参数	量值
a_1	1.40	a_6	-13.29
a_2	1.37	a_7	-7.53
a_3	-1.64	a_8	7.36
a_4	0.60	a_9	2.87
a_5	0.97	a_{10}	4.08

假设机械臂沿某一给定目标轨迹运行, 在运动过程中, 一个外力作用在机械臂末端执行器上。而机械臂系统往往伴随着模型误差、测量噪声及系统扰动等不确定因素, 通过 Matlab/Simulink 来分析测得的电机信号值, 根据所提出的基于时延估计的扰动卡尔曼滤波外力估计器来估计所受外力。将估计的外力施加到机械臂与环境的动态相互作用中, 继而实现机械臂的阻抗柔顺控制, 其具体流程如图4所示, 此环节不作本文的研究要点。

3.2 外力估计仿真分析

首先, 机械臂沿图5所示参考位置信号运动, 机械臂末端不与外部环境进行接触, 无外力作用。

运动过程中机械臂采用PID位置闭环反馈控制器, 将实际位置与期望位置进行实时对比验证并调整。其控制框图如图6所示。机械臂可以很好地跟

踪参考位置信号如图 7 所示。由于机械臂末端不受外力,与外界环境无接触,估计的外力接近于 0,但有一定的估计偏差值,如图 8 所示。

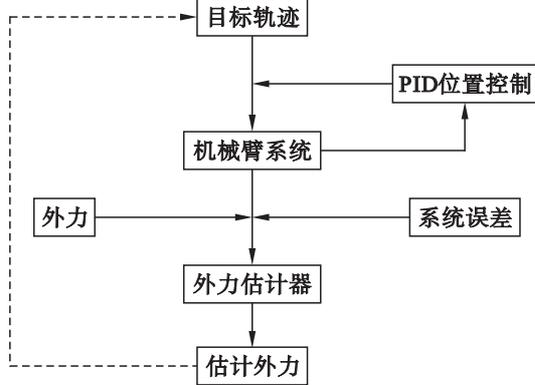


图 4 外力估计仿真流程图

Fig.4 Simulation flow chart of external force estimation

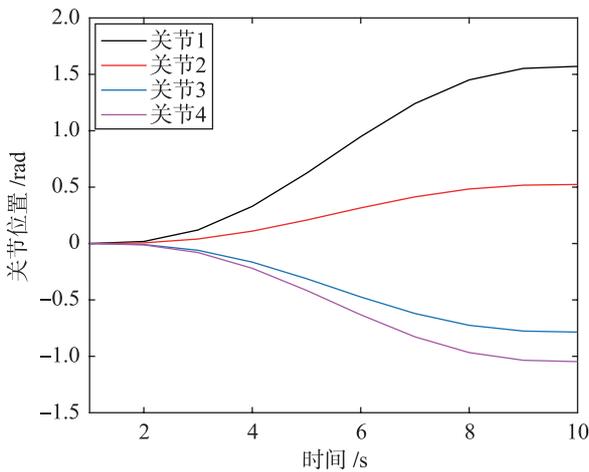


图 5 关节期望轨迹

Fig.5 Desired trajectory of joint

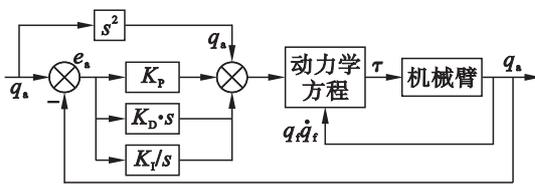


图 6 PID 位置控制系统框图

Fig.6 PID position control system block diagram

与上述自由运动类似,沿目标轨迹运动,在机械臂末端执行器上施加一个外力作用,外力如图 9 所示。在测量数据中加入噪声功率为 0.02 的白噪声信号,模拟关节变量参数测量时产生的测量误差。进行仿真。图 10 给出了实际末端外力与基于时延估计的卡尔曼滤波器算法估计的外力对比结果,并与广义动量观测器(generalized momentum ob-

server, GMO)^[21] 相对比。

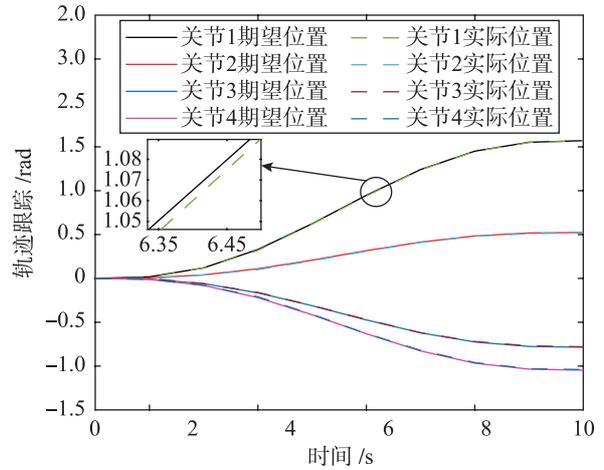


图 7 关节位置跟踪

Fig.7 Joint position tracking

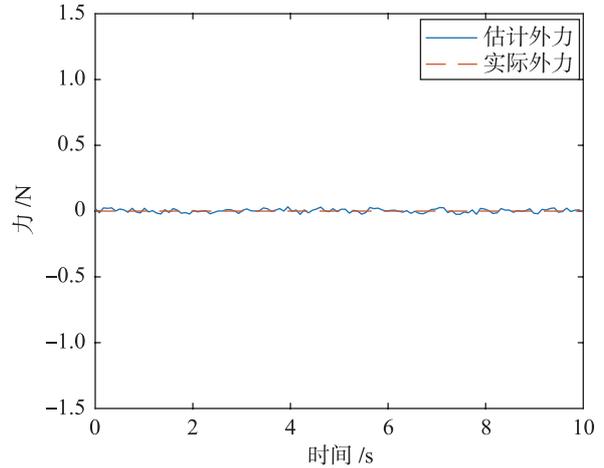


图 8 自由运动下的外力估计

Fig.8 Estimation of external forces in free motion

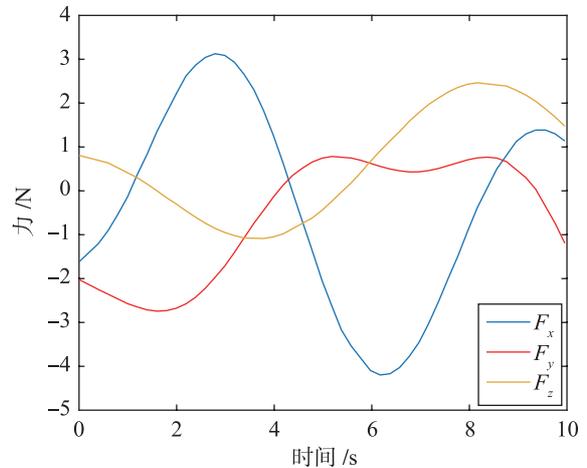


图 9 末端实际外力

Fig.9 Actual external force at the end

从图 10 可以看出,本文提出的外力估计器的

误差结果较小, 外力估计值与实际值的相对误差百分比为 2.52%, 如表 4 所示。而广义动量观测器的估计结果对测量噪声敏感, 误差较大, 误差百分比在 3.75%。证明了该外力估计器对测量噪声的鲁棒性。

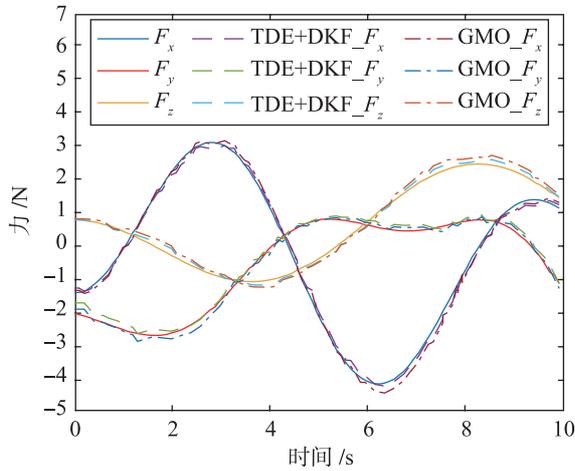


图 10 测量噪声下外力估计对比

Fig.10 Comparison of external force estimates under measured noise

表 4 估计误差

Tab.4 Estimated errors

序号	误差百分比 /%	RMSE
1	2.52	0.261
2	3.75	0.348
3	3.63	0.304
4	4.27	0.445

在图 11 中, 加入了 5% 的系统不确定性模型误差来模拟动力学关节质量参数与原始机械臂参数之间存在的模拟误差, 非线性系统测量噪声用来模拟非线性环境扰动以及关节变量参数测量时产生的模拟测量误差, 添加高斯白噪声外力矩加入到扰动动力学方程中。当实际的外力改变方向时, 估计的外力会有较大跳跃产生。而此时广义动量扰动观测器在联合摩擦估计中存在较大误差, 在估计中显示出了相当大的偏移量, 提出的基于时延估计的扰动卡尔曼滤波器在一定程度上减少了模型带来的不确定误差更接近于真实值。

为了适应现实环境中的扰动及测量噪声, 更好地满足实际工作环境的需求, 设计了一组与实际工作环境相似的模型参数, 机械臂所受外力从零增加至 40 N, 而相应的模型参数误差及系统不确定性扰动增加至 10%。仿真结果如图 12 所示, 机械臂沿目标轨迹运动, 在运动过程中, 受到一个沿 y 轴向

正平面运动的外力, 在 $t = 2$ s 时, 外力逐渐呈线性增加, 在外力突然增加一定值时, 估计值从偏差较大到偏差很小所需要的时间相比较短, 在 $t = 4$ s 时在外力趋于定值时, 抖动平缓、误差较小。在模型误差以及测量噪声皆翻倍增加的情况下, 仍能精准的估计出外力, 充分体现了本文基于时延估计的扰动卡尔曼滤波器外力估计的可行性及有效性。

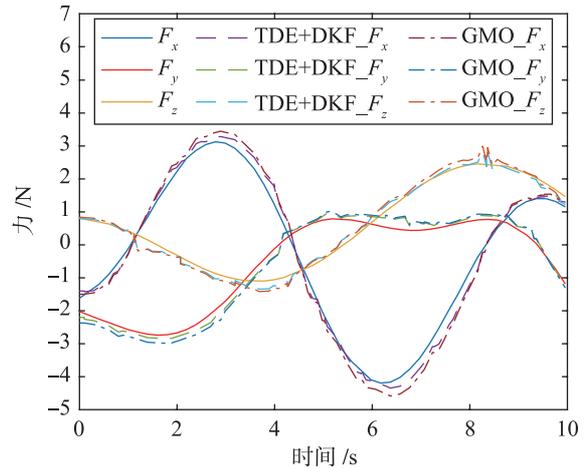


图 11 模型误差下外力估计对比

Fig.11 Comparison of external force estimates under model errors

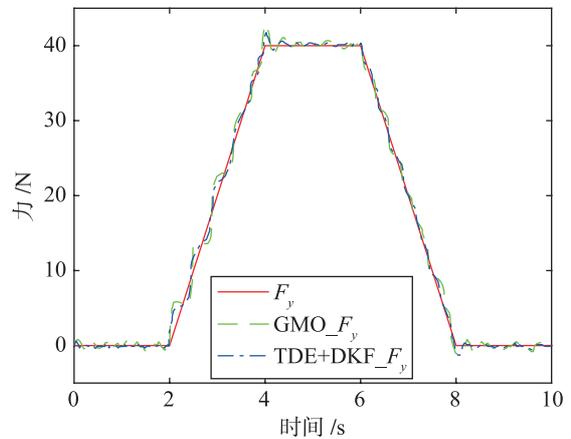


图 12 系统扰动下的外力估计对比

Fig.12 Comparison of external force estimation under system disturbance

图 13 显示了实际力和估计力之间的对比误差, 由于上述情况下干扰测量噪声及模型误差等非线性不确定性因素所造成的影响不同, 误差的大小也不同。图 14 中的误差分布图描述了两种情况下估计误差的对比差异, 1 代表的是测量噪声情况, 2 代表的是模型误差情况, 它们都有一个正态分布的形式。所以本文提出的外力估计器的估计误差几乎是零均值。

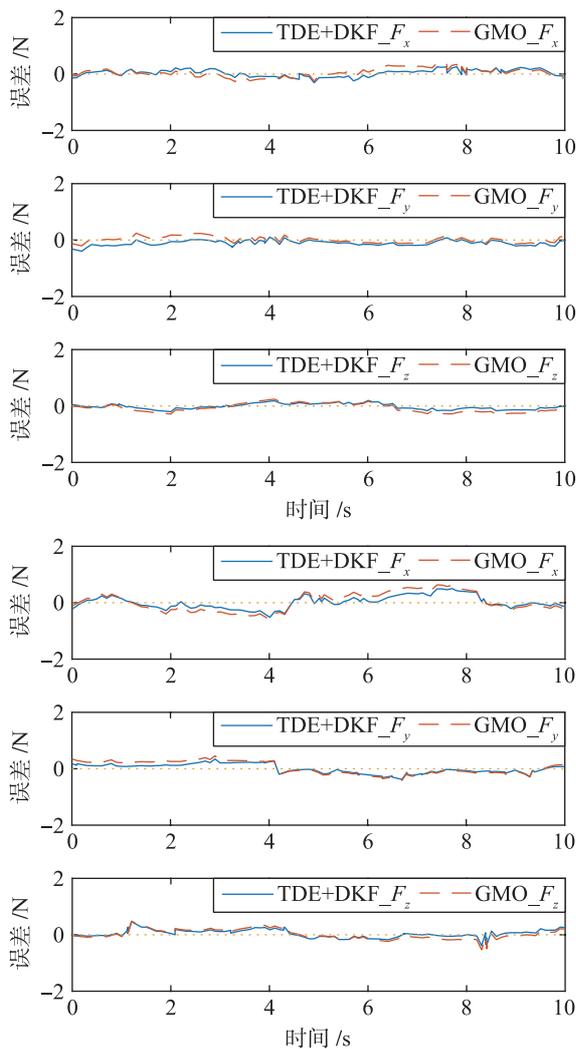


图 13 实际力与估计力的误差

Fig.13 The error between the actual and estimated forces

估计值与实际值之间的均方根误差 RMSE 很小且接近于零。计算公式为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{F} - F)^2} \times 100\% \quad (60)$$

式中, n 为采样数, \hat{F} 、 F 分别为估计值和实际值。

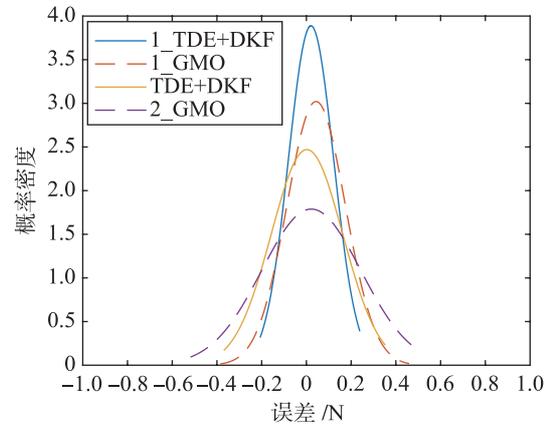


图 14 估计误差的分布

Fig.14 Distribution of estimation error

4 结论

针对机械臂末端接触力估计存在模型误差及系统扰动问题, 本文设计了一种基于时延估计的扰动卡尔曼滤波器来估计外力。在设计估计器的过程中, 利用电机的驱动电流而不使用额外的力传感器, 采用时间延迟估计的方法获取不确定的机械臂动力学模型。设计的扰动卡尔曼滤波器同时考虑了机械臂的动力学和扰动动力学。将外力作为状态变量, 对系统的模型不确定性和扰动进行观测。仿真结果表明, 设计的外力估计器不仅对具有测量噪声、模型误差及不确定性系统扰动具有很好的鲁棒性, 而且能够较好的估计出末端执行器所受外力。证明了该方法的有效性及其可行性。

参考文献

- [1] Kopacek P. Development trends in robotics[J]. Elektrotechnik und Informationstechnik, 2013, 130(2): 42–47.
- [2] Yao Y, Shen Y, Lu Y, et al. Sensorless collision detection method for robots with uncertain dynamics based on fuzzy logics [C]//IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2020: 413–418.
- [3] Lin Y, Zhao H, Ding H. External force estimation for industrial robots with flexible joints[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2020, 5(2): 1311–1318.
- [4] Khan H, Abbasi S J, Kim H H, et al. Robotic arm end-effector reaction force estimation for part assembling process using sliding perturbation observer[C]//International Automatic Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2020. DOI: 10.1109/CACS50047.2020.9289705.
- [5] Mohammadi A, Tavakoli M, Marquez H J, et al. Nonlinear disturbance observer design for robotic manipulators[J]. Control Engineering Practice, 2013, 21(3): 253–267.
- [6] Kawasaki H, Ueki S. Disturbance observer estimating frictions and external forces for robot manipulators[C]//IEEE ANDESCON. Piscataway, USA: IEEE, 2017: 679–692.
- [7] 宋吉来, 曲道奎, 徐方, 等. 机器人无力传感器主动柔顺控制研究[J]. 电机与控制学报, 2020, 24(8): 163–170.
Song J L, Qu D K, Xu F, et al. Research on active compliance control of robot with powerless sensor[J]. Electric Machines

- and Control, 2020, 24(8): 163 – 170.
- [8] Wahrburg A, Bos J, Listmann K D, et al. Motor-current-based estimation of Cartesian contact forces and torques for robotic manipulators and its application to force control[J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2018, 15(2): 879 – 886.
- [9] Le D P, Choi J, Kang S. External force estimation using joint torque sensors for a robot manipulator[C]//IEEE International Conference on Robotics & Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2012: 4507 – 4512.
- [10] Wang Y, Li S, Wang D, et al. Adaptive time-delay control for cable-driven manipulators with enhanced nonsingular fast terminal sliding mode[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2021, 68(3): 2356 – 2367.
- [11] Agarwal V, Parthasarathy H. Disturbance estimator as a state observer with extended Kalman filter for robotic manipulator[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(4): 2809 – 2825.
- [12] Chien S H, Wang J H, Cheng M Y. Performance comparisons of different observer-based force-sensorless approaches for impedance control of collaborative robot manipulators[C]//IEEE Conference on Industrial Cyberphysical Systems. Piscataway, USA: IEEE, 2020: 326 – 331.
- [13] Li X, Wang Y, Yang Z, et al. End-effector force estimation for robotic manipulators from motor current measurements[C]//IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2019: 744 – 749.
- [14] Cho H, Kim M, Lim H, et al. Cartesian sensor-less force control for industrial robots[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, USA: IEEE, 2014: 4497 – 4502.
- [15] Kim H H, Min C L, Jin H K, et al. Evaluation of force estimation method based on sliding perturbation observer for dual-arm robot system[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2020, 19(4). DOI: 10.1007/s12555-019-0324-x.
- [16] 耿艳利, 武正恩, 刘作军, 等. 基于时延估计的动力型下肢假肢分段控制策略研究[J]. 信息与控制, 2021, 50(5): 566 – 573.
- Geng Y L, Wu Z E, Liu Z J, et al. Based on time delay estimation of power type of lower limb prosthesis subsection control strategy research[J]. Information and Control, 2021, 50(5): 566 – 573.
- [17] Fei Y, Wang Y, Wei X, et al. Time delay control of cable-driven manipulators with artificial bee colony algorithm[J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2018, 42(2): 177 – 186.
- [18] 桑宏强, 陈发, 刘芬, 等. 基于外力观测器的 MIS 机器人双边力反馈控制[J]. 控制工程, 2018, 25(12): 2184 – 2190.
- Sang H Q, Chen F, Liu F, et al. Bilateral force feedback control of MIS robot based on external force observer[J]. Control Engineering of China, 2018, 25(12): 2184 – 2190.
- [19] Alenezi B, Zhang M, Hui S, et al. Simultaneous estimation of the state, unknown input, and output disturbance in discrete-time linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021. DOI: 10.1109/TAC.2021.3061993.
- [20] 黄小翀, 倪受东. 基于 Matlab/Simulink 的工业机器人力控制仿真研究[J]. 自动化与仪表, 2018, 33(7): 45 – 49.
- Huang X C, Ni S D. Simulation research of industrial machine manpower control based on MATLAB/Simulink[J]. Automation & Instrumentation, 2018, 33(7): 45 – 49.
- [21] Tian X U, Fan J, Fang Q, et al. Robotic arm collision reaction strategies for safe human-robot interaction without torque sensors [J]. Journal of Mechanics in Medicine and Biology, 2019(34). DOI: 10.1142/S0219519419400347.

作者简介

吕涛(1997 –), 男, 硕士生。研究领域为机械臂运动控制, 复杂系统的动力学控制。

杨芳艳(1979 –), 女, 副教授, 硕士生导师。研究领域为电路与系统。

李清都(1980 –), 男, 教授, 博士生导师。研究领域为仿生机器人理论与技术, 复杂系统的动力学与控制。