信息与控制　2023 年　第 52 卷　第 5 期：607 ~615
DOI：10.13976/j.cnki.xk.2023.2352　文章编号：1002 -0411(2023) -05 -0607 -09

基于动态反向学习和莱维飞行的双搜索模式萤火虫算法

陈　娟[1]，赵　嘉[1]，肖人彬[2]，王　晖[1]，康　平[1]

1. 南昌工程学院信息工程学院，江西 南昌　330099；2. 华中科技大学人工智能与自动化学院，湖北 武汉　430074

基金项目：国家自然科学基金(52069014)；江西省教育厅科技计划(GJJ201915，GJJ2201506，GJJ2201803)

通信作者：赵嘉，zhaojia925@163.com

收稿/录用/修回：2022 -08 -04/2022 -09 -26/2023 -02 -21

摘要

针对多目标萤火虫算法在解决复杂多目标问题时存在收敛性差和分布性不足的问题，提出了基于动态反向学习和莱维飞行的双搜索模式萤火虫算法(MOFA-LR)。该算法通过比较任意一只萤火虫与种群中其余萤火虫的适应度值，判断它们之间的支配关系，根据不同的支配关系选择不同的搜索模式。当萤火虫被支配时，应注重向帕累托前沿上的优质解靠近，因此通过动态反向学习策略求出当前个体的反向解，使用反向解结合全局最优解共同引导萤火虫移动的搜索模式，能够发掘潜在的较好解，使萤火虫最大可能地向有利方向移动，改善了算法的收敛性；当萤火虫不被支配时，应注重获得均匀分布的帕累托前沿，因此使用全局最优解引导萤火虫飞行并结合莱维扰动的搜索模式，既能有效利用非支配解的优良信息，又能避免算法陷入停滞，在改善算法收敛性的同时维护了分布性。最后，为避免算法在迭代后期出现萤火虫严重聚集的现象，添加变异算子帮助种群跳出局部最优，引导种群进行局部开采。将 MOFA-LR 与 12 种新近多目标优化算法进行比较，实验结果表明，MOFA-LR 具有良好的收敛性和分布性，证明了所提策略的有效性。

关键词

萤火虫算法
多目标优化
动态反向学习
莱维飞行
变异算子

中图法分类号： TP18
文献标识码： A

Double Search Mode Firefly Algorithm Based on Dynamic Reverse Learning and Levy Flight

CHEN Juan[1], ZHAO Jia[1], XIAO Renbin[2], WANG Hui[1], KANG Ping[1]

1. *School of Information Engineering*, *Nanchang Institute of Technology*, *Nanchang* 330099, *China*;
2. *School of Artificial Intelligence and Automation*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074, *China*

Abstract

Aiming at the problems of poor convergence and insufficient distribution of multi-objective firefly algorithm in solving complex multi-objective problems, we propose a double search mode firefly algorithm based on dynamic reverse learning and levy flight (MOFA-LR). By comparing the fitness values of any firefly with other fireflies in the population, the algorithm judges the dominance relationship between them, and selects different search modes according to different dominance relationships. When fireflies are dominant, we should pay attention to the quality on the pareto frontier solution near. By dynamic reverse learning strategies, the reverse of the current individual solution using reverse solution combining the global optimal solution to guide the firefly mobile search mode, better to explore potential solutions, make the fireflies best possible to favourable

Keywords

firefly algorithm;
multi-objective optimization;
dynamic reverse learning;
levy flight;
mutation operator

direction, to improve the convergence of the algorithm. When fireflies are not dominated, attention should be paid to obtaining the frontier of uniform distribution. Therefore, using the global optimal solution to guide fireflies to fly and combining with the search mode of levy disturbance can not only effectively use the good information of non-dominated solution, but also avoid the stagnation of the algorithm, and maintain the distribution while improving the convergence of the algorithm. Finally, in order to avoid the phenomenon of firefly aggregation in the late iteration of the algorithm, mutation operators are added to help the population jump out of the local optimal and guide the population to carry out local mining. Comparing MOFA-LR with 12 recent multi-objective optimization algorithms, the experimental results show that MOFA-LR has good convergence and distribution, which proves the effectiveness of the proposed strategy.

0 引言

现实生活中的许多科学研究与工程应用问题存在大量需要同时优化且互相冲突的多个目标，通常称为多目标优化问题(multi-objective optimization problem，MOP)[1]。MOP 的各个子目标之间是相互矛盾的，一个子目标的改善有可能引起其他子目标性能的降低，因此同时使多个子目标一起达到最优是不现实的，只能在各个目标之间进行折中处理，得到一组由众多非支配解组成的集合，即 Pareto 最优解集[2]。传统的数学优化算法在求解 MOP 时需要建立精确的数学表达式，但由于 MOP 模型多样且复杂，对于一些高维、非凸、不连续和多模态等优化问题，传统的数学优化方法常因无法构造精确的数学表达式而难以求解[3]。为解决此类问题，一种受生物启发求解 MOP 的算法应运而生，称为多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithms，MOEAs)[4]。其中群智能优化算法[5-6]是一种模拟自然界中生物群体进化过程的随机优化方法，该方法通过智能个体在种群中移动寻找全局最优解，具有强大的区域搜索能力和计算能力，因此被认为是解决此类多目标优化问题的有效方法，并被广泛应用于各个领域[7-11]。

YANG[12]通过模拟自然界中萤火虫的行为，提出了萤火虫算法(firefly algorithm，FA)，因其操作简单，设置参数少，收敛速度快且性能优越[13-14]，YANG[15]将其拓展到求解多目标优化问题，提出了多目标萤火虫算法(multi-objective firefly algorithm，MOFA)。由于 MOFA 算法中萤火虫的移动仅受制于当前 Pareto 解，因此使算法的搜索范围有限，易陷入局部最优，导致 MOFA 的收敛精度不佳且分布不均匀。

为解决多目标萤火虫算法的不足，提高算法的寻优性能，学者们从不同角度提出了多种改进方法，本文将不同的改进方法归结为 3 类：1）基于自适应参数的改进：DOS 等[16]提出了一种基于 β 概率分布解决电磁优化问题的多目标萤火虫算法(MOBFA)，该算法将萤火虫位置更新公式中随机步长改进为基于 β 概率分布的 α 随机系数，有助于探索目标空间中的隐藏区域，同时利用 NSGA-II 中的拥挤距离方法维护外部档案，增加了种群多样性。AMIRI 等[17]提出了一种用于复合网络中社区检测的多目标增强萤火虫算法(CICA)，该算法采用了一种基于混沌机制的随机参数调整策略，有效解决了自身局部最优问题，同时结合一种新的自适应概率突变策略，提高了算法的收敛性和精度。WANG 等[18]提出了一种用于大数据优化的混合多目标萤火虫算法(HMOFA)，该算法使用一种自适应调整 α 和动态更新 β_0 的混合策略，有助于最小化萤火虫算法对参数的依赖性，对于具有数千个变量的大数据优化问题，能够在搜索过程中自适应的调整控制参数，提高了算法的寻优性能。2）基于学习机制的改进：TSAI 等[19]提出了一种基于非支配排序的多目标萤火虫算法(MONSFA)，该算法改进了萤火虫的学习方式，当不存在支配关系时随机移动或向最优个体移动，同时运用了 NSGA-II 的非支配排序和拥挤距离策略对外部档案进行维护，提高了算法的全局搜索能力。LYU 等[20]提出了一种基于补偿因子和精英学习的多目标萤火虫算法(CFMOFA)，该算法通过引入补偿因子改进萤火虫的学习公式，加快了种群收敛，同时在外部档案中随机选取一只萤火虫作为精英解进行全局引导，避免了算法陷入局部最优，提高了算法的多样性和准确性。3）基于策略融合的改进：谢承旺等[21]提出了一种多策略协同的多目标萤火虫算法(MOFA-MCS)，该算法利用随机化和均匀化的方式初始化

种群, 使用加入莱维扰动的精英解引导移动方式, 并利用 ε 三点最短路径策略来维护外部档案, 加快算法收敛速度的同时提高了算法的勘探能力。ZHAO 等[22]提出了平衡收敛性与多样性的多策略集成萤火虫算法(MEFA-CD), 该算法运用改进的线性同余法代替随机初始化种群, 为算法提供了向有利方向发展的良好开端, 同时使用添加 Maximin 策略的混合学习策略, 既能加快算法收敛, 又能拓宽种群探索区域。

以上文献虽然对萤火虫算法做了很好的改进, 在一定程度上均提升了算法的寻优能力, 但其忽视了萤火虫个体之间性能的差异[23]。对于具有不同性能特性的萤火虫, 采用同一种学习策略, 一方面可能会造成优质萤火虫的优良信息难以继承, 种群收敛性较差; 另一方面种群受劣质解的影响, 移动方向过于片面, 导致分布性较差。为解决此类问题, 凸显萤火虫个体之间性能的差异, 对具有不同特性的萤火虫进行多元化学习, 以弥补单一学习方式的劣势, 本文提出了基于动态反向学习和莱维飞行的双搜索模式萤火虫算法(MOFA-LR), 通过判断任意两只萤火虫之间的支配关系, 根据支配关系为不同性能的萤火虫分配不同的搜索策略。MOFA-LR 具有特点:

1) 被支配萤火虫使用基于动态反向学习策略的搜索模式。被支配萤火虫收敛性较差, 其携带的信息对种群进化不会有太大贡献, 甚至某些劣质个体会抑制种群向有利方向发展, 因此引入动态反向学习策略求其反向解, 使用反向解结合当前最优解共同引导萤火虫移动的搜索模式, 增加了萤火虫个体在 Pareto 最优解周围搜索的可能性, 提高了算法的收敛精度和速度。

2) 非支配萤火虫使用基于莱维飞行策略的搜索模式。非支配萤火虫收敛性较好, 更需注重解集的分布性, 因此引入莱维扰动代替原本公式中的随机项, 使用当前最优解结合莱维扰动引导萤火虫移动的搜索模式, 其"重尾"的独特的行走方式加强了算法的全局搜索能力, 能有效帮助种群跳出局部最优, 使种群具有较好的分布性。

3) 萤火虫位置更新后引入变异算子。在算法迭代后期, 萤火虫个体之间的差异逐渐变小, 会出现严重聚集而陷入停滞的问题。引入变异算子, 使算法具有一定的局部搜索能力, 一方面在迭代后期能加速向最优解收敛, 另一方面维持了种群的多样性。

上述策略分别作用在 MOFA-LR 算法的不同阶段, 针对支配解群体和非支配解分配不同的学习策略, 能有效平衡算法局部搜索和全局探测能力, 显著增强了算法的寻优能力, 提高了多目标萤火虫算法的收敛性和分布性。

1　相关理论知识

1.1　多目标萤火虫算法

萤火虫算法(MOFA)[15]是英国剑桥大学学者 YANG 通过模拟自然界中萤火虫的闪光行为提出的一种新的群智能优化算法。此算法模拟自然界中萤火虫的发光行为, 任意两只萤火虫会因相互吸引而移动, 亮度弱的萤火虫会向亮度强的萤火虫靠近完成位置迭代, 而亮度最强的萤火虫不受其他萤火虫的吸引, 则进行随机移动。

萤火虫的吸引力公式可定义为

$$\beta_{ij} = \beta_0 \mathrm{e}^{-\gamma r_{ij}} \tag{1}$$

式中, β_0 表示萤火虫在 $r=0$ 处的吸引力, 即最大吸引度; r_{ij} 为任意两只萤火虫的欧氏距离, 定义为 $r_{ij} = \|\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j\|$, $\boldsymbol{X}_i$ 和 $\boldsymbol{X}_j$ 分别表示第 i 只萤火虫和第 j 只萤火虫; γ 为光吸收系数, 通常取 $\gamma \in \{0.01, 100]$。

萤火虫 i 会向着比它更亮的萤火虫 j 的方向移动, 移动公式为

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{x}_i(t) + \beta_{ij}(r_{ij})(\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{2}$$

等式右边, 第 2 项表示萤火虫 i 受到吸引力而产生的位移, 第 3 项为随机扰动项; α 为步长因子, 通常取 $\alpha \in \{0, 1]$; $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 是从高斯分布、均匀分布或其他分布中提取的随机数向量。

若萤火虫 i 不受其他任何萤火虫支配时, 则其位置更新公式为

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{g}_i^* + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{3}$$

式中, α 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 的定义同式(2); $\boldsymbol{g}^*$ 是以随机加权和的方式将多目标函数转换为单目标函数得到的当前最优解, 以求取最小化 MOP 为例, 先对每个个体的目标值 f 执行随机加权操作, 再比较组合目标 $\psi(x)$ 的大小, 最终选取随机加权得到的所有组合目标 $\psi(x)$ 中最小的个体作为 $\boldsymbol{g}^*$, 其中 $\psi(x)$ 定义为

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{K} w_k f_k, \quad \sum_{k=1}^{K} w_k = 1 \tag{4}$$

式中, K 表示目标函数的个数, w_k 为(0, 1)之间的随机数。

1.2　莱维飞行

莱维飞行是由法国数学家 Levy 提出的一种步

长具有概率分布的随机游走。引入莱维飞行[24]会产生较长跳跃并多次突变方向的随机移动，即短距离的局部搜索和长距离的跳跃式全局搜索相间，这种飞行方式在加强最优解附近的邻域搜索的同时，又能探测到算法空间的较远解。

莱维飞行的随机步长为

$$s_i = \frac{\mu}{|v|^{\frac{1}{\varphi}}} \tag{5}$$

其中，μ 和 v 是服从正态分布的随机数：

$$\begin{cases}\mu \sim N(0,\ \sigma_v^2)\\ v \sim N(0,\ \sigma_\mu^2)\end{cases} \tag{6}$$

且 $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_v$ 的定义为

$$\begin{cases}\sigma_\mu = \left(\dfrac{\Gamma(1+\varphi)\sin\left(\dfrac{\pi\varphi}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(1+\varphi)}{2}\right)2^{\frac{(\varphi-1)}{2}}\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}}\\ \sigma_v = 1\end{cases} \tag{7}$$

式中，φ 的取值区间通常为 $1<\varphi\leqslant 3$，本文取 $\varphi=1.5$；Γ 为伽玛函数。

1.3 动态反向学习

TIZHOOSH[25]在 2015 年提出了反向学习的概念，其主要思想是同时评估当前解和反向解的适应度值，从中选出较优的解作为下一代个体。

定义 1 动态反向学习策略(DOBL)[26]：设 x_{ij} 为普通萤火虫 x_i 在第 j 维上的值，其反向解为

$$x_{ij}^* = k(a_{ij}+b_{ij}) - x_{ij} \tag{8}$$

式中，$a_{ij}=\min(x_{ij}(t))$，$b_{ij}=\max(x_{ij}(t))$，分别为当前搜索空间的最小值和最大值，其随迭代次数的改变而变化；$i\in\{1,\ N]$，$j\in\{1,\ D]$；N 是种群大小；D 是解空间的维数；k 为反向系数，取(0, 1)之间的随机数。

2 MOFA-LR 算法

对于目标空间中的所有萤火虫，如果采用单一的搜索策略，不重视个体之间性能的差异，萤火虫个体可能无法找到更好的区域。因此，MOFA-LR 算法首先根据非支配排序[27]和拥挤距离[28]进行全局最优萤火虫和全局最差萤火虫选取，全局最优萤火虫用于引导种群中全部萤火虫向更好的方向移动；全局最差萤火虫用于求得被支配萤火虫的反向解。根据任意一只萤火虫 i 相较于不同萤火虫的支配关系，提出了基于动态反向学习策略的搜索模式和基于莱维飞行策略的搜索模式，使任意一只萤火虫处于不同支配关系时获得不同的搜索策略，两种搜索模式共同作用，以平衡算法的收敛性和分布性。同时在迭代后期引入变异算子使其跳出局部最优，增强萤火虫的局部搜索能力，最后利用改进的 SPEA-II[29]策略来维护种群的外部档案，以增加种群的多样性从而获得均匀分布的 Pareto 最优前沿(Pareto-optimal front, PF)。

2.1 基于动态反向学习策略的搜索模式

被支配萤火虫收敛性较差，且分布性有待提高，应该重视向全局最优萤火虫发展。因其携带的信息一方面对种群进化不会有太大的贡献，另一方面某些劣质基因甚至会抑制种群寻找到更优的非支配解，因此引入动态反向学习策略，求出被支配萤火虫的反向解，利用反向解与全局最优解共同引导被支配萤火虫移动。根据概率定理，反向解有 50% 的概率比当前解更靠近最优解[30]，因此有利于种群搜索到更多接近真实 Pareto 前沿的优质解，提高了发掘潜在较好解的可能，在一定程度上提高了算法的搜索效率，同时又扩大搜索空间，避免盲目搜索造成的时间浪费，有助于维护种群收敛性的同时改善种群的分布性。其位置更新公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i(t+1) = {} & \omega_1\boldsymbol{x}_i(t) + \beta_{ij}(\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)) + \\ & \beta_{ig}(\boldsymbol{x}_{\text{best}}(t) - \boldsymbol{x}_i(t)) + \omega_2\boldsymbol{x}_i^* + \alpha\boldsymbol{\varepsilon}_i\end{aligned} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{x}_i^* = k(\boldsymbol{x}_{\text{best}} + \boldsymbol{x}_{\text{worst}}) - \boldsymbol{x}_i \tag{10}$$

式中，ω_1，$\omega_2\in(0,\ 1)$且 $\sum_{i=1}^{2}\omega_i=1$；β_{ij}表示萤火虫 i 和萤火虫 j 之间的吸引力；$\boldsymbol{x}_{\text{best}}$表示全局最优解；$\boldsymbol{x}_{\text{worst}}$表示全局最差解；$\beta_{ig}$表示萤火虫 i 和全局最优萤火虫 $\boldsymbol{x}_{\text{best}}$之间的吸引力；$\boldsymbol{x}_i^*$ 表示萤火虫 i 的动态反向解；α 为步长因子，通常取 $\alpha\in\{0,\ 1]$；$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 是从高斯分布、均匀分布或其他分布中提取的随机数向量；k 为反向系数，取(0, 1)之间的随机数。

2.2 基于莱维飞行策略的搜索模式

非支配萤火虫最贴合最优解，无论是向全局最优萤火虫靠近，还是注重自身随机飞行，所产生的下一步都极大可能是非支配解，但随着迭代次数的增加，最优个体极易陷入局部极值，导致萤火虫收敛至同一位置且停滞不前，不利于种群均匀地分布在 Pareto 前沿上。因此引入莱维扰动代替原本移动公式中的随机步长，因其步长满足“重尾”的莱维分布，所以兼具小范围的局部搜索能力和长距离的全局探测能力，同时结合非支配解共同引导萤火虫移动，充分利用了优质解的优良信息，既加快了算法收敛又能跳出局部最优，可以有效地平衡算法的收敛性和分布性。其位置更新公式为

$$x_i(t+1)=\omega_3 x_i(t)+\omega_4 x_{\text{best}}+\alpha \oplus \varepsilon_{\text{Levy}} \tag{11}$$

式中，ω_3，$\omega_4 \in (0, 1)$且 $\sum_{i=3}^{2}\omega_i=1$；x_{best}表示全局最优解；α 为步长因子，通常取$\alpha \in \{0, 1\}$；$\oplus$表示点对点乘法；$\varepsilon_{\text{Levy}}$ 表示由式(5)生成的随机搜索路径。

2.3　变异算子

在算法迭代过程中，随着种群的不断进化，萤火虫个体之间的差异逐渐变小，并出现了严重聚集现象，这会导致算法陷入局部最优。通常会引入变异算子[31]来解决这一问题，变异算子是对种群的父代个体采取随机变化来形成子代，其目的是保持种群的多样性和避免过早收敛。基于此，本文引入局部变异算子，萤火虫 i 每进行一次位置更新后，按照一种随迭代次数动态递减的变异概率 p_{m} 随机对 i 的分量进行扰动，这里 $p_{\text{m}}=1-\dfrac{t}{G_{\max}}$，若选中的是第 k 维分量，变异操作可定义为

$$x_i^{k'}=\begin{cases}\text{rand}(l_k, u_k), & \text{rand}(0, 1)\geqslant p_{\text{m}}\\ x_j^k, & \text{rand}(0, 1)<p_{\text{m}}\end{cases} \tag{12}$$

式中，l_k 和 u_k 分别表示萤火虫第 k 维的下限和上限；p_{m} 表示变异的概率；t 为当前迭代次数；$G_{\max}$为最大迭代次数；rand(0, 1)表示 0 和 1 之间的随机数。其中，l_k 和 u_k 的定义为

$$\begin{cases}l_k=x_i^k-p_{\text{m}}(u-l)\\ u_k=x_i^k+p_{\text{m}}(u-1)\end{cases} \tag{13}$$

算法前期，迭代次数 t 较小，该算子能够均匀地搜索目标空间，充分发挥算法的全局搜索能力，改善种群的分布性；算法后期，迭代次数 t 增大，该算子注重局部搜索，使变异后产生的新解以更大的概率逼近真实的 Pareto 最优解，维护了种群的收敛性。

2.4　算法流程

结合上述描述的多种策略，给出 MOFA-LR 的算法流程：

输入　种群规模 N_{pop}，外部档案 N_{rep}的规模为 N，最大迭代次数 $G_{\max}$，光吸收系数 γ，萤火虫最大吸引力 β_0，随机步长 α。

输出　Pareto 最优解集

步骤 1　随机初始化种群。生成 N 个萤火虫个体 x_i，其中 $i=1, 2, \cdots, N$，迭代次数 $t=0$。

步骤 2　计算每只萤火虫的适应度值。

步骤 3　对萤火虫种群进行非支配排序，按解的支配关系分层，然后按照拥挤度确定层级内排名，选出最优个体 x_{best}和最差个体 x_{worst}。

步骤 4　将排序后的萤火虫种群的前 N 个个体存入外部档案。

步骤 5　当 $t<G_{\max}$时，重复步骤 6 ~ 步骤 10。

步骤 6　对萤火虫进行遍历，重复步骤 7 ~ 步骤 8。

步骤 7　对任意两只萤火虫 i 与萤火虫 j 按照 Pareto 支配关系进行比较。被支配萤火虫按照式(9)进行位置更新，非支配萤火虫按照式(11)进行位置更新。

步骤 8　引入变异算子。对位置更新后的萤火虫进行变异，若变异后的萤火虫优于变异前的萤火虫，则进行替换，否则不做任何操作。

步骤 9　外部档案的更新与维护。若外部档案中解的数量超出其规模，则利用改进的 SPEA-II 的筛选机制进行删除。

步骤 10　$t=t+1$。

步骤 11　输出 Pareto 最优解集。

3　实验与结果分析

为了测试 MOFA-LR 算法的性能，本节将 MOFA-LR 与 12 种新近的多目标优化算法进行比较，比较算法包括：基于拥挤距离的多目标粒子群优化算法(MOPSO-CD)[32]、基于速度约束的多目标粒子群优化算法(SMPSO)[33]、基于分解的多目标粒子群优化算法(dMOPSO)[34]、基于平衡适应度估计的多目标粒子群优化算法(NMPSO)[35]、具有多种搜索策略的新型多目标粒子群优化算法(MMOPSO)[36]、一种新的基于局部搜索的多目标粒子群优化算法(NSLS)[37]、考虑收敛性和多样性的强化支配关系的多目标优化算法(NSGA-II-SDR)[38]、基于约束决策和目标空间的多目标进化算法(Top)[39]、基于分解的多目标进化算法(MOEA/D-ACD)[40]、MONSFA[19]、CFMOFA[20]和基于最大最小策略和非均匀变异的萤火虫算法(HVMA-M)[41]。为了验证算法的有效性，本文选取 5 个 2 目标测试函数和 6 个 3 目标测试函数，并采用反世代距离(IGD)[42]评价指标来评估算法的综合性能。为了确保实验的公平性，对于 2 目标问题，各算法的种群规模 N_{pop}设置为 100，外部档案 EA 的最大规模 N_{rep}设置为 100，每个测试函数评估 50 000 次；对于 3 目标问题，各算法的种群规模 N_{pop}设置为 200，外部档案 EA 的最大规模 N_{rep}设置为 200，每个测试函数评估 200 000 次，每种算法在同一测试问题上独立运行

表 1 MOFA-LR 与 12 种新近 MOEA 在 IGD 上的实验结果

Tab.1 Experimental results of MOFA-LR and 12 recent MOEA on IGD

测试函数	指标	MONSFA	CFMOFA	dMOPSO	NMPSO	MMOPSO	SMPSO	MOPSO-CD
ZDT1	mean	7.12×10^{-2}	8.98×10^{-3}	1.39×10^{-2}	3.03×10^{-2}	4.87×10^{-3}	5.12×10^{-3}	3.98×10^{-3}
	std	5.60×10^{-3}	8.65×10^{-4}	4.31×10^{-3}	1.43×10^{-2}	3.33×10^{-4}	3.97×10^{-4}	4.52×10^{-5}
ZDT2	mean	1.11×10^{-1}	9.17×10^{-3}	1.56×10^{-2}	1.95×10^{-2}	7.96×10^{-3}	5.03×10^{-3}	9.58×10^{-3}
	std	7.80×10^{-3}	2.34×10^{-3}	5.69×10^{-3}	3.82×10^{-3}	2.43×10^{-4}	2.49×10^{-4}	5.02×10^{-5}
ZDT3	mean	1.30×10^{0}	1.27×10^{-2}	1.39×10^{-2}	1.02×10^{-1}	5.48×10^{-3}	5.36×10^{-3}	4.73×10^{-2}
	std	3.40×10^{-3}	2.52×10^{-3}	9.12×10^{-4}	5.54×10^{-4}	1.91×10^{-4}	1.96×10^{-4}	5.76×10^{-5}
ZDT4	mean	2.35×10^{0}	1.09×10^{1}	6.14×10^{-2}	2.44×10^{-1}	4.74×10^{-1}	9.75×10^{-1}	3.68×10^{0}
	std	2.40×10^{-1}	5.95×10^{0}	1.36×10^{-3}	7.31×10^{-3}	3.01×10^{-4}	1.05×10^{0}	2.20×10^{0}
ZDT6	mean	2.33×10^{-1}	1.93×10^{-2}	3.11×10^{-3}	4.47×10^{-3}	4.28×10^{-3}	3.90×10^{-3}	3.39×10^{-3}
	std	8.90×10^{-3}	1.52×10^{-2}	1.48×10^{-5}	4.64×10^{-4}	2.16×10^{-4}	2.56×10^{-4}	8.81×10^{-5}
DTLZ2	mean	4.37×10^{-3}	5.57×10^{-2}	8.92×10^{-2}	5.65×10^{-2}	4.99×10^{-2}	4.85×10^{-2}	4.72×10^{-2}
	std	3.60×10^{-4}	1.81×10^{-3}	5.46×10^{-3}	1.56×10^{-3}	1.72×10^{-3}	1.19×10^{-3}	8.48×10^{-4}
DTLZ3	mean	5.89×10^{0}	3.09×10^{1}	2.17×10^{0}	5.74×10^{-2}	**4.89×10^{-2}**	7.34×10^{0}	8.72×10^{1}
	std	1.30×10^{0}	7.02×10^{0}	1.89×10^{0}	2.19×10^{-3}	**1.33×10^{-3}**	1.29×10^{1}	2.59×10^{1}
DTLZ4	mean	8.34×10^{-3}	1.05×10^{-1}	2.29×10^{-1}	8.97×10^{-2}	4.93×10^{-2}	2.41×10^{-1}	8.39×10^{-2}
	std	1.10×10^{-3}	4.10×10^{-2}	3.40×10^{-2}	1.23×10^{-1}	1.16×10^{-3}	1.61×10^{-1}	1.52×10^{-2}
DTLZ5	mean	1.20×10^{-3}	6.15×10^{-1}	2.47×10^{-2}	1.31×10^{-2}	2.97×10^{-3}	2.70×10^{-3}	2.53×10^{-3}
	std	1.80×10^{-4}	6.46×10^{-2}	2.35×10^{-3}	1.98×10^{-3}	1.63×10^{-4}	8.45×10^{-5}	8.07×10^{-5}
DTLZ6	mean	5.23×10^{-2}	8.52×10^{-1}	2.26×10^{-2}	1.27×10^{-2}	3.43×10^{-3}	2.70×10^{-3}	2.46×10^{-3}
	std	9.00×10^{-4}	2.22×10^{-1}	4.75×10^{-5}	1.84×10^{-3}	4.67×10^{-4}	9.90×10^{-5}	4.30×10^{-5}
DTLZ7	mean	9.84×10^{-2}	5.64×10^{-2}	1.02×10^{-1}	4.60×10^{-2}	8.46×10^{-2}	6.30×10^{-2}	5.76×10^{-2}
	std	9.90×10^{-3}	1.61×10^{-3}	3.44×10^{-3}	1.82×10^{-3}	8.68×10^{-2}	4.60×10^{-3}	4.05×10^{-3}
	total	0	0	0	0	1	0	1
	ranking	8.45	9.00	8.00	7.55	5.09	6.00	6.36
	final rank	11	13	10	9	2	4	5

测试函数	指标	MOEA/D-ACD	NSLS	NSGA-II-SDR	Top	HVMA-M	MOFA-LR
ZDT1	mean	6.31×10^{-2}	6.62×10^{-2}	7.80×10^{-3}	8.51×10^{-3}	5.08×10^{-3}	**3.88×10^{-3}**
	std	4.80×10^{-3}	1.33×10^{-2}	1.61×10^{-3}	1.57×10^{-3}	1.06×10^{-3}	**3.87×10^{-5}**
ZDT2	mean	1.02×10^{-1}	1.19×10^{-1}	5.67×10^{-3}	1.31×10^{-2}	5.57×10^{-3}	**3.87×10^{-3}**
	std	7.90×10^{-3}	2.48×10^{-2}	3.82×10^{-4}	2.91×10^{-3}	1.72×10^{-3}	**4.57×10^{-5}**
ZDT3	mean	3.35×10^{-2}	7.54×10^{-2}	1.16×10^{-2}	1.66×10^{-2}	6.79×10^{-3}	**4.47×10^{-3}**
	std	2.80×10^{-3}	1.43×10^{-2}	3.19×10^{-3}	8.02×10^{-3}	2.23×10^{-3}	**1.11×10^{-4}**
ZDT4	mean	1.69×10^{0}	2.38×10^{-1}	**9.76×10^{-3}**	3.30×10^{0}	4.56×10^{-2}	2.69×10^{-2}
	std	2.80×10^{-1}	1.09×10^{-1}	**5.39×10^{-3}**	1.82×10^{0}	2.37×10^{-2}	1.01×10^{-2}
ZDT6	mean	2.16×10^{-1}	3.52×10^{-3}	4.35×10^{-3}	3.86×10^{-3}	1.52×10^{-1}	**3.06×10^{-3}**
	std	9.40×10^{-3}	1.30×10^{-4}	3.77×10^{-4}	3.77×10^{-4}	1.08×10^{-1}	**1.56×10^{-5}**
DTLZ2	mean	**2.76×10^{-3}**	3.77×10^{-2}	4.23×10^{-1}	5.78×10^{-2}	2.33×10^{-1}	4.52×10^{-2}
	std	**1.20×10^{-4}**	2.84×10^{-4}	4.84×10^{-2}	1.84×10^{-3}	4.41×10^{-2}	1.14×10^{-3}
DTLZ3	mean	4.22×10^{0}	1.79×10^{0}	3.99×10^{-1}	2.84×10^{-1}	1.63×10^{1}	2.56×10^{1}
	std	6.00×10^{-1}	1.03×10^{0}	8.37×10^{-2}	7.04×10^{-1}	1.20×10^{1}	2.68×10^{-1}
DTLZ4	mean	**5.10×10^{-3}**	7.55×10^{-2}	4.15×10^{-1}	6.03×10^{-2}	1.82×10^{-1}	2.01×10^{-1}
	std	**3.80×10^{-4}**	7.60×10^{-2}	9.04×10^{-2}	2.12×10^{-3}	7.90×10^{-2}	4.23×10^{-2}
DTLZ5	mean	**6.39×10^{-4}**	2.21×10^{-3}	2.37×10^{-2}	4.04×10^{-3}	7.49×10^{-1}	5.33×10^{-1}
	std	**5.40×10^{-5}**	2.46×10^{-4}	4.65×10^{-3}	1.33×10^{-4}	2.90×10^{-1}	5.00×10^{-2}
DTLZ6	mean	5.10×10^{-2}	**2.22×10^{-3}**	3.79×10^{-2}	2.68×10^{-3}	3.22×10^{0}	5.02×10^{-1}
	std	1.00×10^{-3}	**1.68×10^{-5}**	1.32×10^{-2}	1.22×10^{-4}	2.81×10^{0}	6.92×10^{-4}
DTLZ7	mean	7.58×10^{-2}	4.38×10^{-2}	5.95×10^{-2}	9.18×10^{-2}	1.84×10^{-1}	**3.92×10^{-2}**
	std	3.90×10^{-3}	3.23×10^{-3}	2.39×10^{-3}	8.52×10^{-2}	7.32×10^{-2}	**4.86×10^{-4}**
	total	3	0	1	0	0	**5**
	ranking	7.18	5.91	7.00	6.91	8.64	**4.91**
	final rank	8	3	7	6	12	**1**

30 次。表 1 给出了 MOFA-LR 与上述 12 种新近多目标优化算法在 11 个测试函数上的 IGD 均值(mean)和标准差(std)，同时统计了每个算法在所有测试函数集上获得的最优值的总数(total)。表格的倒数第二行运用 Friedman 检验得出了各多目标优化算法结果的秩的平均值(ranking)，对于 IGD 指标，秩平均值越小表示算法性能越优，最后一行表示各多目标优化算法性能的平均排名(final rank)。其中加黑的数据表示各优化算法在同一测试函数中的最优结果。

根据表 1 所示，MOFA-LR 算法分别在 ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT6 和 DTLZ7 等测试问题上获得了 IGD 最优均值，也就是在 11 个测试问题上，本文算法获得了 5 个 IGD 最优均值，在所有比较算法中取得最优值次数最多。MOEA/D-ACD 在全部测试问题上获得 3 次最优的 IGD 均值，MMOPSO、NSLS 和 NSGA-II-SDR 在全部测试问题上均获得一次最优的 IGD 均值，而 MONSFA、CFMOFA、dMOPSO、NMPSO、SMPSO、MOPSO-CD、Top 和 HVMA-M 均无一次能获得最优的 IGD 均值。根据表 1 中 IGD 均值和标准差的结果表明，本文算法在 11 个测试问题上具有最好的 IGD 性能。

由表 1 的 Friedman 检验结果得知，其与表中的 IGD 均值所反映的结果保持一致。MOFA-LR 的秩平均值最小，随后次优是 MMOPSO，排名最差的是 CFMOFA。综合来看，MOFA-LR 表现出了最好的综合性能，在收敛性和分布性方面有显著优势。

4　结语

多目标萤火虫算法全局使用单一的搜索策略，无法凸显个体之间性能的差异，会导致种群过早收敛且分布性较差，同时还会降低萤火虫个体的泛化能力，针对此问题，本文提出了基于动态反向学习和莱维飞行的双搜索模式萤火虫算法(MOFA-LR)。该算法通过比较萤火虫之间的支配关系，根据不同的支配关系选择不同的搜索模式，当萤火虫 i 被支配时，其收敛性较差，因此使用添加动态反向学习策略的搜索模式，增加了发掘潜在较好解的可能，以便算法在寻优过程中能搜索到更多接近 Pareto 前沿的优质解，提高了算法的收敛速度和精度；当萤火虫 i 不被支配时，虽收敛性较好，但因最优个体易陷入局部极值，使其分布性不足，因此使用添加莱维飞行策略的搜索模式，其“重尾”的独特行走方式，会在算法陷入极值时突变方向产生较长跳跃的随机移动，能够帮助算法跳出局部最优，有效平衡了算法的收敛性和分布性。同时对完成位置更新的萤火虫个体引入变异算子，解决了迭代后期萤火虫严重聚集的现象，避免种群过早收敛。将 MOFA-LR 与 12 种新近的多目标优化算法，通过在多目标领域常用的测试函数上进行比较研究并对其实验结果进行 Friedman 检验，证明了 MOFA-LR 是解决多目标优化问题的一种可行且有效的算法。未来的研究工作将考虑高维多目标优化问题的求解，以及研究本算法在实际工程中的应用。

参考文献

[1] HUA Y C, LIU Q Q, HAO K R, et al. A survey of evolutionary algorithms for multi-objective optimization problems with irregular pareto fronts[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2021, 8(2): 303－322.

[2] WANG L P, PAN X T, SHEN X, et al. Balancing convergence and diversity in resource allocation strategy for decomposition-based multi-objective evolutionary algorithm[J/OL]. Applied Soft Computing, 2021, 100 [2022－07－13]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494620309066. DOI:10.1016/j.asoc.2020.106968.

[3] YANG X S. Nature-inspired optimization algorithms: Challenges and open problems[J/OL]. Journal of Computational Science, 2020, 46(10) [2022－06－12]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877750320300144. DOI:10.1016/j.jocs.2020.101104.

[4] HONG X F, JIANG M F, YU J L, et al. Fine-grained ensemble of evolutionary operators for objective space partition based multi-objective optimization[J]. IEEE Access, 2021, 9: 400－411.

[5] 王万良. 人工智能及其应用[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2020：240－252.
WANG W L. Artificial intelligence and its applications[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2020: 240－252.

[6] 肖人彬，冯振辉，王甲海. 群体智能的概念辨析与研究进展及应用分析[J]. 南昌工程学院学报，2022，41(1)：1－21.
XIAO R B, FENG Z H, WANG J H. Collective intelligence: Conception, research progress and application analysis[J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2022, 41(1): 1－21.

[7] MARICHELVAM M K, PRABAHARAN T, YANG X S. A discrete firefly algorithm for the multi-objective hybrid flow shop scheduling problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(2): 301－305.

[8] CHEN Y, YANG D, YU J. Multi-UAV task assignment with parameter and time-sensitive uncertainties using modified two-part wolf pack search algorithm[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2018, 54(6): 2854 - 2872.

[9] 石翠翠, 刘媛华, 陈昕. 基于粒子群算法优化支持向量回归的水质预测模型[J]. 信息与控制, 2022, 51(3): 307 - 317.
SHI C C, LIU Y H, CHEN X. Water quality prediction model based on particle swarm optimization support vector regression [J]. Information and Control, 2022, 51(3): 307 - 317.

[10] 张曦, 李璠, 付雪峰, 等. 随机学习萤火虫算法优化的模糊软子空间聚类算法[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2021, 45(2): 137 - 144.
ZHANG X, LI F, FU X F, et al. The fuzzy soft subspace clustering algorithm optimized by random learning firefly algorithm [J]. Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science), 2021, 45(2): 137 - 144.

[11] 谢智峰, 吴润秀, 吕莉. 多策略融合学习萤火虫算法在年径流预测中的应用[J]. 南昌工程学院学报, 2021, 40(1): 20 - 27.
XIE Z F, WU R X, LYU L. Application of multi-strategy fusion learning firefly algorithm in annual runoff forecast[J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2021, 40(1): 20 - 27.

[12] YANG X S. Nature-inspired metaheuristic algorithms[M]. Frome, UK: Luniver Press, 2008.

[13] 赵嘉, 陈文平, 肖人彬, 等. 面向多峰优化问题的自主学习萤火虫算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(8): 1971 - 1980.
ZHAO J, CHEN W P, XIAO R B, et al. Firefly algorithm based on self-learning for multi-peak optimization problem[J]. Control and Decision, 2022, 37(8): 1971 - 1980.

[14] 赵嘉, 谢智峰, 吕莉, 等. 深度学习萤火虫算法[J]. 电子学报, 2018, 46(11): 2633 - 2641.
ZHAO J, XIE Z F, LYU L, et al. Firefly algorithm with deep learning[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(11): 2633 - 2641.

[15] YANG X S. Multiobjective firefly algorithm for continuous optimization[J]. Engineering with computers, 2013, 29(2): 175 - 184.

[16] DOS S C L, BARO T C, SCHAUENBURG F, et al. A multiobjective firefly approach using beta probability distribution for electromagnetic optimization problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2013, 49(5): 2085 - 2088.

[17] AMIRI B, HOSSAIN L, CRAWFORD W J, et al. Community detection in complex networks: Multi-objective enhanced firefly algorithm[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 46(1): 1 - 11.

[18] WANG H, WANG W, CUI L, et al. A hybrid multi-objective firefly algorithm for big data optimization[J]. Applied Soft Computing, 2017: 806 - 815.

[19] TSAI C W, HUANG Y T, CHIANG M C. A non-dominated sorting firefly algorithm for multi-objective optimization[C]//International Conference on Intelligent Systems Design and Applications. Piscataway, USA: IEEE, 2014: 62 - 67.

[20] LYU L, ZHAO J, WANG J, et al. Multi-objective firefly algorithm based on compensation factor and elite learning[J]. Future Generation Computer Systems, 2019, 91: 37 - 47.

[21] 谢承旺, 张飞龙, 陆建波, 等. 一种多策略协同的多目标萤火虫算法[J]. 电子学报, 2019, 47(11): 2359 - 2367.
XIE C W, ZHANG F L, LU J B, et al. Multi-objective firefly algorithm based on multiply cooperative strategies[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(11): 2359 - 2367.

[22] ZHAO J, CHEN D D, XIAO R B, et al. Multi-strategy ensemble firefly algorithm with equilibrium of convergence and diversity [J]. Applied Soft Computing, 2022, 123[2022 - 07 - 05]. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/s1568494622002885. DOI: 10.1016/j.asoc.2022.108938.

[23] 肖人彬, 王英聪. 群智能自组织劳动分工研究进展[J]. 信息与控制, 2019, 48(2): 129 - 139, 148.
XIAO R B, WANG Y C. Research progress on group intelligence self-organizing division of labor[J]. Information and Control, 2019, 48(2): 129 - 139, 148.

[24] YANG X S, DEB S. Eagle strategy using Lévy walk and firefly algorithms for stochastic optimization[J]. Studies in Computational Intelligence, 2010, 284: 101 - 111.

[25] TIZHOOSH H R. Opposition-based learning: A new scheme for machine intelligence[C]//International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2005: 695 - 701.

[26] 汪慎文, 丁立新, 谢大同. 应用反向学习策略的群搜索优化算法[J]. 计算机科学, 2012, 39(9): 183 - 187.
WANG S W, DING L X, XIE D T. Group search optimizer applying opposition-based learning[J]. Computer Science, 2012,

39(9): 183－187.

[27] DEB K, JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 577－601.

[28] DUGGIRALA A, JANA R K, SHESY V R, et al. Design optimization of deep groove ball bearings using crowding distance particle swarm optimization[J]. Sadhana: Academy Proceedings in Engineering Science, 2018, 43(1): 1－8.

[29] ZITZLER E, LAUMANNS M, THIELE L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm[R/OL]. (2001－05－01)[2022－07－04]. Zurich, Switzerland: Computer Engineering and Networks Laboratory, ETH Zurich. https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/145755. DOI:10.3929/ethz-a-004284029.

[30] RAHNAMAYAN S, TIZHOOSH H R, SALAMA M M. Opposition-based differential evolution[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2008, 12(1): 64－79.

[31] WEN S H, ZHENG J H, LI M Q. Comparison and research of mutation operators in multi-objective evolutionary algorithms[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(2): 74－78.

[32] RAQUEL C R, NAVAL JR P C. An effective use of crowding distance in multi-objective particle swarm optimization[C]//7th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. New York, USA: Association for Computing Machinery, 2005: 257－264.

[33] NEBRO A J, DURILLO J J, GARCIA-NIETO J, et al. SMPSO: A new PSO-based metaheuristic for multi-objective optimization [C]//IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multi-Criteria Decision-Making. Piscataway, USA: IEEE, 2009: 66－73.

[34] ZAPOTECAS M S, COELLO C C A. A multi-objective particle swarm optimizer based on decomposition[C]//13th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. Dublin, USA: Association for Computing Machinery, 2011: 69－76.

[35] LIN Q Z, LIU S B, ZHU Q L, et al. Particle swarm optimization with a balanceable fitness estimation for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 22(1): 32－46.

[36] LIN Q Z, LI J Q, DU Z H, et al. A novel multi-objective particle swarm optimization with multiple search strategies[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 247(3): 732－744.

[37] CHEN B L, ZENG W H, LIN Y B, et al. A new local search-based multi-objective optimization algorithm[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(1): 50－73.

[38] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 23(2): 331－345.

[39] LIU Z Z, WANG Y. Handling constrained multi-objective optimization problems with constraints in both the decision and objective spaces[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(5): 870－884.

[40] WANG L P, ZHANG Q F, ZHOU A M, et al. Constrained subproblems in a decomposition-based multi-objective evolutionary algorithm[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(3): 475－480.

[41] 赵嘉，陈丹丹，肖人彬，等. 一种基于最大最小策略和非均匀变异的萤火虫算法[J]. 智能系统学报，2022，17(1): 116－130.

ZHAO J, CHEN D D, XIAO R B, et al. A heterogeneous variation firefly algorithm with maximin strategy[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2022, 17(1): 116－130.

[42] Wang W L, Li W K, Wang Z, et al. Opposition-based multi-objective whale optimization algorithm with global grid ranking [J]. Neurocomputing, 2019, 341(14): 41－59.

作者简介

陈　娟(1998－)，女，硕士生。研究领域为智能计算。

赵　嘉(1981－)，男，博士，教授，硕士生导师。研究领域为智能计算，模式识别，大数据分析。

肖人彬(1965－)，男，博士，教授，博士生导师。研究领域为群智能，涌现计算，复杂系统建模与仿真。