

DOI: 10.3724/SP.J.1219.2012.00290

# 一种新型的复杂网络的完全同步

曹倩, 张荣, 过榴晓

(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 为使得网络的节点间无直接耦合关系且网络可控制达到同步, 运用生物系统中群体感应的思想构造了一种通过扩散的外部信号与节点之间的感应而使节点连接的新型复杂网络, 并在周期边界条件下, 研究了该复杂网络节点的同步问题. 根据李亚普诺夫稳定性理论证明了通过控制感应强度, 可实现网络中各节点运动的完全同步. 数值仿真结果表明了该网络可在周期解处达到同步, 且随感应强度不同, 周期解的复杂程度不同.

**关键词:** 复杂动态网络; 群体感应; 感应强度; 完全同步

**中图分类号:** O231.5, O193

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1002-0411(2012)-03-0290-05

## A New Complete Synchronization of Complex Network

CAO Qian, ZHANG Rong, GUO Liuxiao

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** In order to make a network which has no direct coupling relationship between nodes and can be controlled to realize synchronization, a new complex network is constructed using the idea of quorum sensing in biological systems. The network nodes are connected through the induction between the diffused external signal and nodes. The synchronization problem of the complex network nodes is studied in the periodic boundary conditions. It is proved that complete synchronization can be realized by controlling the quorum sensing strength of nodes according to Lyapunov stability theory. The simulation results show that the synchronization is achieved at periodic solutions and the complexities of the periodic solutions are different when the quorum sensing strength is different.

**Keywords:** complex dynamical network; quorum sensing; sensing strength; complete synchronization

### 1 引言 (Introduction)

自 18 世纪数学家欧拉研究并解决了著名的“Konigsberg 七桥问题”起, 人们开始学会用网络的观点描述客观世界. 网络引起了研究者的广泛关注. 经研究发现, 自然界中存在的很多复杂系统都可以通过网络来加以描述<sup>[1-2]</sup>.

一个典型的复杂网络是由一些节点以及连接这些节点的边构成的, 其中用不同节点来表示真实系统中的不同个体, 用边来表示个体间的相互作用关系. 现实生活中的社会关系网、电力及交通网等都可以看做是复杂网络<sup>[3]</sup>. 复杂动力学网络就是一个将非线性动力系统当做节点, 节点间由于耦合的原因相互连接, 在这种连接下各节点系统可由其它节点系统的状态来调整自己的状态, 从而实现网络的控制与同步. 1995 年, Wu 等人经研究得出在一定条件下, 足够强的耦合可以导致网络中节点之间

的同步<sup>[4]</sup>, 引发了复杂网络同步的研究热潮. 2002 年, Barahona 发现由  $N$  个相同的节点构成的连续时间耗散耦合动态网络的同步情况, 并通过数值仿真证明了这一结果<sup>[5]</sup>, 这一发现又将复杂网络同步的研究推上了一个新的高峰. 2010 年, 王健安等人提出了一个新的网络同步模型, 根据 LaSalle 不变原理来设计自适应控制器, 使 2 个节点数、拓扑结构及内部耦合等均可不同的网络获得同步<sup>[6]</sup>, 将 2 个性质特点完全不同的网络同步化, 进一步拓宽了研究方向. 本文将根据细菌间存在的群体感应这一行为特点, 从新的视角来考虑复杂网络中各节点的连接关系, 从而提出一种新的复杂网络.

群体感应 (quorum sensing, QS) 是指细菌通过分泌一种或几种小分子的化学信号分子来促进细菌个体之间的相互交流, 协调种群行为的一种现象. 在自然界中, 细菌群体感应机制也可以在多种种群

合成的系统中用来沟通不同群体之间的细胞 [7]。也就是说这种系统中的各个细菌间并无任何联系，而是通过环境中的信号分子浓度来与每个细菌胞体进行信息沟通，从而使细菌胞体能够对自身状态进行调节，实现细菌群体的整体行为。目前关于群体感应现象的研究重点依然集中在对于细菌的基因表达的影响上 [8-9]。

本文根据细菌间群体感应这种耦合思想，结合群体感应决定基因时钟的模型 [10] 的形式，构造了一个新型的复杂网络，该网络将一个动力学系统作为一个节点（相当于细菌），节点互相无耦合关系；然后用外部信号与节点做感应的方式将它们联系起来。由于细菌群体感应中的外部信号分子以扩散的形式传递信息，即相邻的细菌交换信息进而达到整个细菌群体间的相互交流，因此本文建立网络时也采用扩散的外部信号来连接网络，考虑这种用特殊耦合方式连接的网络的同步问题。通过构造李亚普诺夫函数，证明在一定条件下该网络各节点同步化的正确性，并且通过数值仿真验证了各节点的完全同步。

## 2 网络描述 (Description of the network)

本文模型的建立主要受到 Danino 等人提出的群体感应决定基因时钟的模型 [10] 的启发：

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= C_A \left[ 1 - \left( \frac{d}{d_0} \right)^4 \right] P(\alpha, \tau) - \frac{\gamma_A A}{1 + f(A + I)} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= C_I \left[ 1 - \left( \frac{d}{d_0} \right)^4 \right] P(\alpha, \tau) - \frac{\gamma_A A}{1 + f(A + I)} \\ \frac{\partial H_i}{\partial t} &= \frac{bI}{1 + kI} - \frac{\gamma_H A H_i}{1 + gA} + D(H_e - H_i) \\ \frac{\partial H_e}{\partial t} &= -\frac{d}{1-d} D(H_e - H_i) - \mu H_e + D_1 \frac{\partial^2 H_e}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1)$$

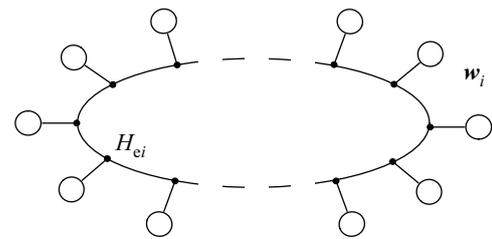
其中,  $A, I, H_i \in \mathbb{R}$ , 为细胞中 3 种基因的浓度;  $H_e \in \mathbb{R}$  为环境中信号分子的浓度;  $C_A, C_I, d_0, \gamma_A, f, b, k, \gamma_H, g, D, \mu, D_1 \in \mathbb{R}$ , 为系统参数, 具体取值根据实验获得;  $P(\cdot)$  为连续函数, 表示在延迟时间  $\tau$  内蛋白质的产量;  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 为  $P(\cdot)$  的系统参数。

模型 (1) 中的第 4 个式子即为环境中信号分子浓度的变化表达式。为方便计算蛋白浓度, 对第 4 式的最后 1 项进行了离散化处理,  $D_1 \delta^{-2}(H_{i-1} + H_{i+1} - 2H_i)$ , 并加入了  $H_1 = H_N$  的边界条件, 简化计算。

本文根据模型 (1) 中外界信号的传递形式及模型处理方式提出了式 (2) 所示的复杂网络:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{w}_i}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{w}_i) + \mathbf{K}(\mathbf{R}H_i - \mathbf{w}_i) \\ \frac{dH_i}{dt} = D(H_i - \mathbf{S}\mathbf{w}_i) - \mu H_i + \\ D_1 \delta^{-2}(H_{i-1} + H_{i+1} - 2H_{ei}) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{w}_i^T \in \mathbb{R}^n$ , 是系统的状态变量;  $H_{ei} \in \mathbb{R}$ , 为外部信号;  $\mathbf{f}(\cdot)$  是连续的非线性向量函数;  $\mathbf{K} = \text{diag}\{k, k, k\}$ , 表示感应强度;  $\mathbf{R}^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^n$ , 为投影向量;  $D, \mu, D_1, \delta \in \mathbb{R}^+$ , 为系统参数。从模型的网络方程中也可以看出, 这是一个以特殊方式耦合的复杂网络, 即各个节点  $\mathbf{w}_i$  间并无直接的耦合关系, 而是通过另一个扩散流的作用将其耦合起来。网络的连接关系如图 1(a) 所示。从图中可以看出, 该网络各节点间的关联远远弱于一般的规则网络、小世界 (small-world) 网络等。本文主要研究在扩散流  $H_i$  满足  $H_1 = H_N$  的边界条件下网络 (2) 的控制及同步情况, 此时网络如图 1(b) 所示。



(b) 在边界条件  $H_i = H_N$  下的网络关系示意图

图 1 网络 (2) 中的节点关系示意图

Fig.1 Schematic diagram of the relationships among the nodes of the network (2)

定义误差  $\mathbf{e}_i = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}$ ,  $f_i = H_{ei} - H_{i-1}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ), 在此边界条件下, 有  $f_1 = f_N$ , 则:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{w}}_i - \dot{\mathbf{w}}_{i-1} = \mathbf{f}(\mathbf{w}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i-1}) + \mathbf{K}\mathbf{R}f_i - \mathbf{K}\mathbf{e}_i \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_i &= \dot{H}_{ei} - \dot{H}_{e(i-1)} = Df_i - D\mathbf{S}\mathbf{e}_i - \mu f_i + \\ &D_1 \delta^{-2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) \end{aligned} \quad (4)$$

在下面的研究中, 若满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 0$ , 则称网络 (2) 中各节点的运动达到完全同步。

## 3 完全同步 (Complete synchronization)

定理 1 给出了网络 (2) 中各节点运动达到完全同步的条件:

定理 1 对于网络 (2), 若  $\mathbf{f}(x)$  满足 Lipschitz 条

件且  $\mu > D$ , 则当  $k$  足够大时, 该网络达到完全同步.

证明 因为  $f(x)$  满足 Lipschitz 条件, 故存在  $L \in \mathbb{R}$  满足:

$$f(\mathbf{w}_i) - f(\mathbf{w}_{i-1}) \leq L(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}) = L\mathbf{e}_i$$

取  $V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N f_i^2$ , 则  $\dot{V}(t) = \sum_{i=2}^N \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=2}^N f_i \dot{f}_i$ , 由式 (3) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i &= \mathbf{e}_i^T (f(\mathbf{w}_i) - f(\mathbf{w}_{i-1})) + \mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{R} f_i - \mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i \\ &\leq \mathbf{e}_i^T L \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{R} f_i - \mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i \\ &= (L - k) \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + f_i \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{R} f_i$  是标量, 故其值与其转置的值相等. 又由式 (4) 可得

$$f_i \dot{f}_i = D f_i^2 - f_i D \mathbf{S} \mathbf{e}_i - \mu f_i^2 + D_1 \delta^{-2} (f_i f_{i+1} + f_{i-1} f_i - 2 f_i^2)$$

因为  $f_1 = f_N$ , 故:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^N f_i \dot{f}_i &= \sum_{i=2}^N D f_i^2 - \sum_{i=2}^N f_i D \mathbf{S} \mathbf{e}_i - \sum_{i=2}^N \mu f_i^2 + \sum_{i=2}^N D_1 \delta^{-2} (f_i f_{i+1} + f_{i-1} f_i - 2 f_i^2) \\ &= \sum_{i=2}^N (D - \mu) f_i^2 - \sum_{i=2}^N f_i D \mathbf{S} \mathbf{e}_i - \sum_{i=2}^N D_1 \delta^{-2} (f_i - f_{i-1})^2 \end{aligned}$$

综上所述可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=2}^N \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=2}^N f_i \dot{f}_i \\ &\leq \sum_{i=2}^N (L - k) \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=2}^N (D - \mu) f_i^2 - D_1 \delta^{-2} \sum_{i=2}^N (f_i - f_{i-1})^2 + \sum_{i=2}^N f_i (\mathbf{R}^T k - D \mathbf{S}) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

故由已知  $\mu > D$ , 当  $k$  足够大时, 即可得出  $\dot{V}(t) < 0$ . 因此  $V(t)$  单调递减趋近于 0, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=2}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=2}^N f_i^2 \right) = 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 0$ , 其中  $i = 2, 3, \dots, N$ , 即网络 (2) 中的各节点运动达到完全同步.

为后面研究方便, 此处假设同步后节点运动的动力学振子为  $\mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^n$ .

### 4 数值仿真 (Numerical simulation)

仿真中, 将节点的动力学系统选为 Lorenz 混沌

系统, 其方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(-x + y) \\ \dot{y} = bx - y - xz \\ \dot{z} = -cz + xy \end{cases}$$

选取  $\mathbf{R} = (1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{S} = (1, 0, 0)$ ,  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 8/3$ ,  $D = 1$ ,  $\mu = 1.1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $\delta = 10/(N - 1)$ . 在下面的数值模拟中, 为了方便观察结果, 取误差  $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i - \bar{\mathbf{w}}$ ,  $i = 2, 3, \dots, N$ .

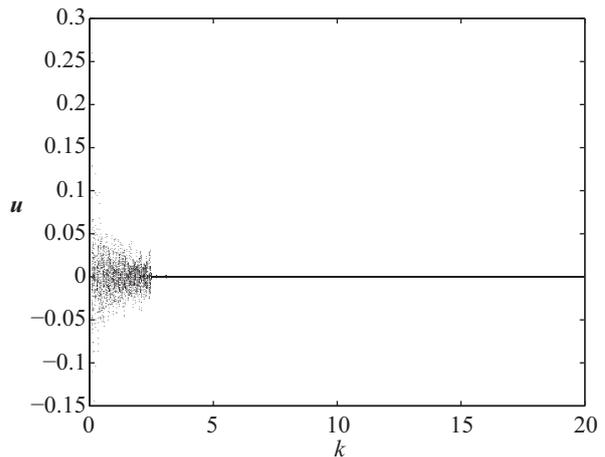


图2 误差  $\mathbf{u}$  随  $k$  变化时的变化  
Fig.2 The changes of the error  $\mathbf{u}$  as  $k$  changes

观察感应强度大小  $k$  变化时各节点运动的同步情况, 由图 2, 当  $k \geq 2.8$  时, 系统各节点可达到完全同步. 当  $k = 2.8$  时, 第 1 个节点的各分量误差情况如图 3 所示. 从图中可以看出, 随着时间的增加, 各分量上的误差都将趋于 0, 与图 2 情况相符.

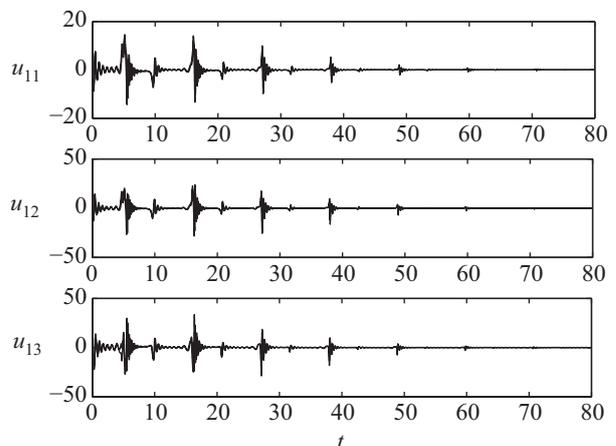


图3 当  $k = 2.8$  时第 1 个节点  $\mathbf{u}_1$  各分量的误差随时间  $t$  变化情况  
Fig.3 The changes of errors of each components of  $\mathbf{u}_1$  with the change of  $t$  when  $k = 2.8$

对同步状态下节点的运动情况做进一步观察，图 4 为用极大值法所画振子  $P$  的第 1 分量随参数  $k$  变化的分岔图，图 5 中 (a)、(b)、(c) 分别为  $k = 2.8$ 、 $k = 5.8$  和  $k = 10$  时的  $P$  相图。综合图 4 与图 5 可发现：随参数  $k$  由小到大，振子  $P$  的运动逐渐从高周期轨道变为低周期轨道，两图均能表现出这一特点。

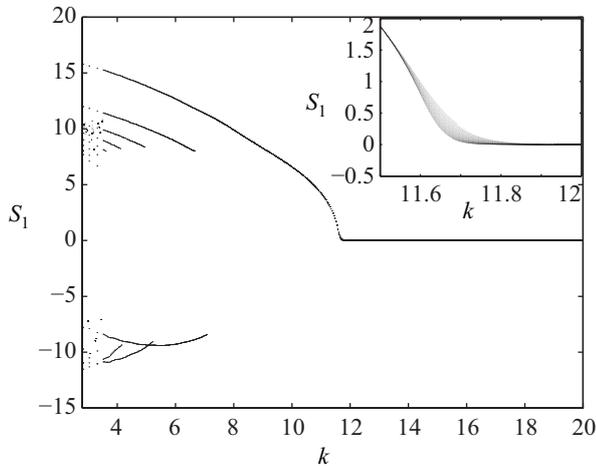


图 4 同步后节点  $S$  运动的第 1 分量随参数  $k$  变化的分岔图  
Fig.4 Bifurcation diagram of the first component of  $S$  with the change of  $k$

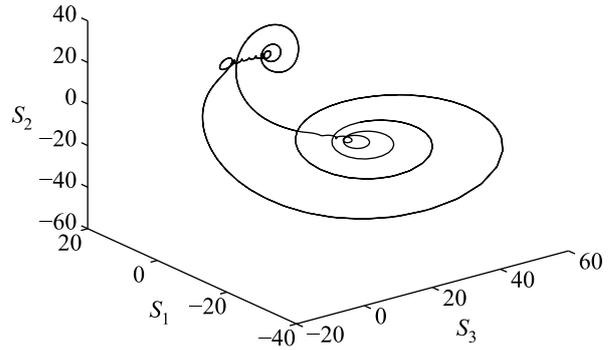
由图 4 发现， $k$  到达 11 到 12 间的某点时，系统达到平衡点，下面对网络的平衡点失稳处  $k$  的取值进行研究。

研究中首先将网络模型在原点附近线性化，然后计算其雅可比矩阵的特征值。当  $k \geq 11.8278$  时，所有特征值的实部都是负的；当  $k \leq 11.8277$  时，开始出现正实部的特征值，并逐渐增多且实部扩大，也与分岔图所表示情况相符。

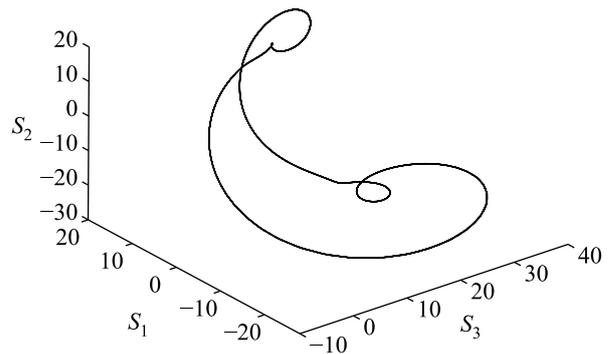
进一步测试网络的稳定情况。在第 1 个节点的 3 个分量上都加上噪声，仿真可得出：当  $k = 10$  时，各节点可达到同步。若是加正弦函数，当  $k = 10$  时也可达到同步。

一般复杂网络模型，如文 [11] 中所研究的网络，既有内部耦合，又有节点间的耦合关系，使节点间连接密切，更容易达到运动同步。而网络 (2) 中仅由外部扩散信号与各节点感应来连接，使节点间关联远弱于文 [11] 中所提复杂网络。但文 [11] 中模型可在混沌态达到同步状态，而网络 (2) 在  $k$  充分大时，能在周期态同步。这里的感应强度充分大在生物意义上说明外部信号可以很好地沟通细菌间要表达的信息，从而完成细菌的群体行为；当细菌外部的信号分子不能将信息充分传达时，各细菌将继续各自的行动而不能实现种群行为。在此复杂网络中则表

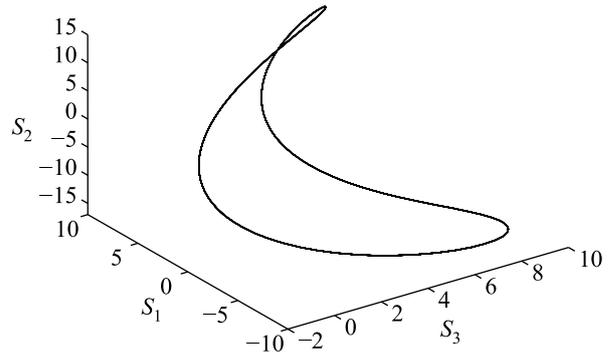
现为，当  $k$  较小时，复杂网络没有出现混沌同步，与生物界中的情况一致。



(a) 当  $k = 2.8$  时节点相图



(b) 当  $k = 5.8$  时节点相图



(c) 当  $k = 10$  时节点相图

图 5 不同  $k$  值下的节点  $S$  运动轨迹

Fig.5 The trajectories of  $S$  under the different values of  $k$

### 5 结论 (Conclusion)

本文研究了一类新型的复杂动态网络的完全同步，该网络是根据群体感知中的耦合思想构造的。该网络的特点是节点间无耦合关系，节点间的连接是通过外部信号与各节点感应的方式。通过控制感应强度实现节点的完全同步，并利用李亚普诺夫稳定性定理对该现象进行了理论证明，通过 Lorenz 系统进行了数值仿真，并且对平衡点失稳处进行了研究，找出了相应的  $k$  值，又通过增加噪声和周期函

数的方法测试网络,可见该网络的同步稳定情况较好.但网络(2)仅在周期态能达到同步,若要得到更好的结果,需进行进一步研究.

在研究水污染随河流扩散,对河流周围城市造成污染的情况等类似问题时,若将城市的水污染情况抽象为节点,则可形成复杂网络.若城市的某些受污染情况能达到同步,那么可以通过对一个城市的污染情况的研究而得到河流周边城市也有相类似现象的结论.由于城市间无直接的关联而是通过与受污染的河流间的联系而关联起来,故得到的网络与本文研究的网络有相似特点,该模型有较高的研究价值.

### 参考文献 (References)

- [1] Albert R, Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 47-97.
- [2] Newman M E J. The structure and function of complex networks[J]. *SIAM Review*, 2003, 45(2): 167-256.
- [3] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. *Nature*, 1998, 393(4): 440-442.
- [4] Wu C W, Chua L O. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Application*, 1995, 42(8): 430-447.
- [5] Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(5): 89-92.
- [6] 王健安, 刘贺平, 石馨, 等. 具有时变时滞耦合的两个不同复杂网络的自适应同步 [J]. *北京科技大学学报*, 2010, 32(10): 1372-1378.
- Wang J A, Liu H P, Shi X, et al. Adaptive synchronization between two different complex networks with time-varying delay coupling[J]. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2010, 32(10): 1372-1378.
- [7] Elowitz M B, Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators[J]. *Nature*, 2000, 403(1): 335-338.
- [8] 邱健, 贾振华, 李承光, 等. 细菌群体感应淬灭酶的研究进展 [J]. *微生物学通报*, 2006, 33(4): 139-143.
- Qiu J, Jia Z H, Li C G, et al. Advance on bacterial quorum-quenching enzymes[J]. *Microbiology*, 2006, 33(4): 139-143.
- [9] 朱良苗, 杨维青. 群体感应系统对细菌耐药的调控作用 [J]. *中国抗生素杂志*, 2011, 36(1): 7-10.
- Zhu G M, Yang W Q. Quorum sensing system regulation on bacterial resistance[J]. *Chinese Journal of Antibiotics*, 2011, 36(1): 7-10.
- [10] Danino T, Mondragón-Palomino Octavio O, Tsimring L, et al. A synchronized quorum of genetic clocks[J]. *Nature*, 2010, 463(12): 326-330.
- [11] Zhou J, Lu J A, Lü J H. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network[J]. *Automatica*, 2008, 44(4): 996-1003.

### 作者简介:

- 曹倩 (1987-), 女, 硕士生. 研究领域为非线性动力学, 混沌控制与同步.
- 张荣 (1962-), 女, 博士, 副教授. 研究领域为非线性动力学, 混沌控制与同步, 微分方程数值解.
- 过榴晓 (1975-), 女, 博士, 副教授. 研究领域为非线性动力学, 应用数学.