

# 一类目标跟踪系统的QR估计算法\*

杨学珊

(中国科技大学十系)

〔摘要〕 本文对一类常见的匀速运动目标跟踪系统给出了其状态噪声方差 $Q$ 与量测噪声方差 $R$ 的一个新算法,并给出算法的渐近性质。与以往文献中所用算法不同之处在于直观、简单,还可处理状态噪声与量测噪声相关的情况,计算机模拟表明该算法是成功的。

## 一 引言

众所周知,卡尔曼滤波广泛用于雷达对目标量测的滤波、平滑与预测。然而,正态过程运用卡尔曼滤波,必须预先知道系统的状态噪声方差与量测噪声方差。它们不精确会影响滤波的稳定性,甚至会使滤波发散<sup>[1]</sup>,然而 $Q$ 与 $R$ 一般很难预先准确知道,甚至很难预先估计。以往文献中对 $R$ 特别对 $Q$ 的估计都比较复杂,比较有效的一些方法可参见〔2〕、〔3〕、〔4〕等。〔3〕给出了 $Q$ 与 $R$ 的次最优自适应估计,〔4〕对〔3〕进一步补充。〔3〕、〔4〕的方法虽然比较有效,但必须在卡尔曼滤波中获得被观测随机变量的样本方差。本文对一类常见匀速目标跟踪系统给出的 $Q$ 及 $R$ 估计算法仅依赖于观测值,方法简单、直观、易于工程上应用。

## 二 $Q$ 与 $R$ 的估计

考虑如下线性系统:

$$S_{k+1} = \Phi S_k + W_k \quad (2.1)$$

$$Y_k = M S_k + Z_k$$

$$\text{这里 } S_k = \begin{bmatrix} x_k, \dot{x}_k, \tilde{x}_k, \tilde{\dot{x}}_k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s'_k \\ \tilde{s}'_k \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$W_k = \begin{bmatrix} 0, v_k, 0, \tilde{v}_k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w'_k \\ \tilde{w}'_k \end{bmatrix}$$

$$Z_k = \begin{bmatrix} z_k, \tilde{z}_k \end{bmatrix}^T, \quad Y_k = \begin{bmatrix} y_k, \tilde{y}_k \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_1 \end{bmatrix}$$

$$Z = E\{Z_k Z_k^T\} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = E\{W_k W_k^T\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1 \end{bmatrix}$$

$x_k$ 及 $\tilde{x}_k$ 分别表示 $k$ 时刻目标位置在 $X$ 、 $Y$ 轴上的坐标; $\dot{x}_k, \tilde{\dot{x}}_k$ 分别表示 $k$ 时刻 $X$ 、 $Y$ 轴方向的目标速度。 $\{W_k\}, \{Z_k\}$ 分别为零均值平稳白噪声序列, $v_k, \tilde{v}_k, z_k$ 与 $\tilde{z}_k$ 分别表示方差为 $Q_v, \tilde{Q}_v, R, \tilde{R}$ 的高斯分布随机变量。 $v_k$ 与 $z_k$ 以及 $\tilde{v}_k$ 与 $\tilde{z}_k$ 在同一时刻可以相关,分别满足

$$\left. \begin{aligned} \text{COV}\{v_k, z_k\} &= S_{vz} \delta_{k,l} \\ \text{COV}\{\tilde{v}_k, \tilde{z}_k\} &= S_{\tilde{v}\tilde{z}} \delta_{k,l} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

假设 $\tilde{v}_k$ 与 $z_l, v_k$ 与 $\tilde{z}_l$ 对一切 $k, l$ 均不相关。有以下定理:

**定理1** 匀速运动目标跟踪系统(2.1)在

上述假设下,当 $S_{vz}$ 与 $S_{\tilde{v}\tilde{z}}$ 已知时, $Q_v, \tilde{Q}_v, R, \tilde{R}$ 计算公式如下:

$$R = -[D(1) + 2TS_{vz}]/4 \quad (2.4)$$

$$Q_v = [D(0) - 6R - 2TS_{vz}]/T^2 \quad (2.5)$$

$$\tilde{R} = -[\tilde{D}(1) + 2T\tilde{S}_{\tilde{v}\tilde{z}}]/4 \quad (2.6)$$

$$\tilde{Q}_v = [D(0) - 6\tilde{R} - 2T\tilde{S}_{\tilde{v}\tilde{z}}]/T^2 \quad (2.7)$$

\*收到本文的时间是1983年5月10日。

其中

$$D(j) = E[\Delta^2 y_k \Delta^2 y_{k-j}], j=0,1,2 \quad (2.8)$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} \quad (2.8a)$$

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_k - \Delta y_{k-1} \quad (2.8b)$$

$$\tilde{D}(j) = E[\Delta^2 \tilde{y}_k \Delta^2 \tilde{y}_{k-j}], j=0,1,2 \quad (2.8')$$

$$\tilde{\Delta y}_k = \tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1} \quad (2.8'a)$$

$$\Delta^2 \tilde{y}_k = \tilde{\Delta y}_k - \tilde{\Delta y}_{k-1} \quad (2.8'b)$$

$T$ 为采样周期。

**证明** 利用分块矩阵得到

$$\left. \begin{aligned} s'_{k+1} &= \Phi_1 s'_k + W'_k \\ y_k &= M_1 s'_k + z_k \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{s}'_k &= \tilde{\Phi}_1 \tilde{s}'_k + \tilde{W}'_k \\ \tilde{y}_k &= \tilde{M}_1 \tilde{s}'_k + \tilde{z}_k \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中  $M_1 = \tilde{M}_1 = [1 \ 0]$ ，其余同上述。考虑到(2.9)与(2.10)的结构相似处，以(2.9)为例可得到：

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k-2} \\ &= T \dot{x}_{k-1} - T \dot{x}_{k-2} + z_k - 2z_{k-1} + z_{k-2} \\ &= T v_{k-2} + z_k - 2z_{k-1} + z_{k-2} \end{aligned}$$

同理可求出

$$\Delta^2 y_{k-j} = T v_{k-j-2} + z_{k-j} - 2z_{k-j-1} + z_{k-j-2}$$

于是

$$E[\Delta^2 y_k \Delta^2 y_{k-j}] = \begin{cases} T^2 Q + 6R + 2TS_{,,}, & j=0 \\ -4R - 2TS_{,,}, & j=1 \end{cases}$$

记  $D(j) = E[\Delta^2 y_k \Delta^2 y_{k-j}]$  于是得到(2.4)、(2.5)，同理得(2.6)、(2.7)。

当  $S_{,,}$  未知时，有

**定理 2** 匀速运动目标跟踪系统(2.1)在

上述假设下，当  $S_{,,}$  与  $S_{\gamma\gamma}$  未知时， $Q_{,,}$ ， $\tilde{Q}_{,,}$ ， $R$ ， $\tilde{R}$  计算公式如下：

$$S_{,,} = [4D(2) + D(1)]/2T \quad (2.11)$$

$$R = -[D(1) + 2TS_{,,}]/4 \quad (2.4)$$

$$Q_{,,} = [D(0) - 6R - 2TS_{,,}]/T^2 \quad (2.5)$$

$$S_{\gamma\gamma} = [4\tilde{D}(2) + \tilde{D}(1)]/2T \quad (2.12)$$

$$\tilde{R} = -[\tilde{D}(1) + 2TS_{\gamma\gamma}]/4 \quad (2.6)$$

$$\tilde{Q}_{,,} = [\tilde{D}(0) - 6\tilde{R} - 2TS_{\gamma\gamma}]/T^2 \quad (2.7)$$

**证明** 仍以(2.9)为例，与定理1类似

$$E\{\Delta^2 y_k \Delta^2 y_{k-j}\} = \begin{cases} T^2 Q_{,,} + 6R + 2TS_{,,}, & j=0 \\ -4R - 2TS_{,,}, & j=1 \\ TS_{,,} + R & j=2 \end{cases}$$

于是获得(2.11)，(2.4)，(2.5)，同理可得(2.12)，(2.6)，(2.7)。

从两定理看到，系统(2.1)在上述假设下， $Q$ 与 $R$ 的数值仅依赖于 $D(j)$ ，即仅依赖于输出 $y_i$ 值。当给出 $D(j)$ 最佳估计 $\hat{D}(j)$ 后，可获 $Q$ 与 $R$ 的估计 $\hat{Q}_{,,}$ ， $\hat{R}$ (将 $\hat{D}(j)$ 代入定理1或定理2)，对 $\tilde{Q}_{,,}$ ， $\tilde{R}$ 同样。

### 计算方法

由于 $D(j)$ 中的 $\Delta^2 y_k$ 是 $\{v_k\}$ 与 $\{z_k\}$ 的线性组合， $\{z_k\}$ 、 $\{v_k\}$ 平稳，故 $\Delta^2 y_k$ 也平稳， $\Delta^2 \tilde{y}_k$ 同样。使用各态历经性，得出相关函数 $D(j)$ 的估计为

$$\hat{D}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=j}^N \Delta^2 y_k \Delta^2 y_{k-j} \quad (2.13)$$

$$\text{同理 } \hat{\tilde{D}}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=j}^N \Delta^2 \tilde{y}_k \Delta^2 \tilde{y}_{k-j} \quad (2.14)$$

虽然该估计对于有限样本是有偏的，若用 $1/(N-j)$ 代替 $1/N$ 可得到 $D(j)$ 的无偏估计，但〔5〕指出(2.13)或(2.14)估计比对应的无偏估计要好，因为它给出最小均方误差。使用〔6〕并注意 $D(j)$ 的平稳性，可以得到(2.13)中的 $\hat{D}(j)$ 或(2.14)中的 $\hat{\tilde{D}}(j)$ 为 $D(j)$ 及 $\tilde{D}(j)$ 的渐近、无偏、一致估计。

不难证明，对 $\hat{D}(j)$ 或 $\hat{\tilde{D}}(j)$ 有以下结果：

$$\hat{D}_{N+1}(j) = \hat{D}_N(j) + \frac{1}{N+1} [\Delta^2 y_{N+1} \Delta^2 y_{N+1-j} - \hat{D}_N(j)] \quad (2.15)$$

$$\hat{\tilde{D}}_{N+1}(j) = \hat{\tilde{D}}_N(j) + \frac{1}{N+1} [\Delta^2 \tilde{y}_{N+1} \Delta^2 \tilde{y}_{N+1-j} - \hat{\tilde{D}}_N(j)] \quad (2.16)$$

公式(2.15)或(2.16)表明： $\hat{D}_{N+1}(j)$ 或 $\hat{\tilde{D}}_{N+1}(j)$ 可选取初值 $\hat{D}_0(j) = \hat{\tilde{D}}_0(j) = 0$ ，使用递推计算，

在线进行。这样,当给出量测值 $Y_k = [y_k, \tilde{y}_k]^T$ 对于系统(2.1), $R, Q$ 的估计按如下步骤进行。

- 1° 给出初值 $\hat{D}_0(j) = \tilde{D}_0(j) = 0$ , 并令 $N = 0$ 。
- 2° 由(2.8a)、(2.8b)算出 $\Delta y_k, \Delta^2 y_k$ , 取 $k = N + 1$ , 同样由(2.8'a)、(2.8'b)算出 $\Delta \tilde{y}_k, \Delta^2 \tilde{y}_k$ 。
- 3° 由(2.15)及(2.16)计算 $\hat{D}_{N+1}(j)$ 及 $\tilde{D}_{N+1}(j)$ ,  $j = 0, 1, 2$ 。
- 4° 若 $S_{,,}$ 及 $S_{\tilde{,,}}$ 未知, 则用(2.11)及(2.12)计算之; 若 $S_{,,}, S_{\tilde{,,}}$ 已知(包括为零)则转5°。
- 5° 由(2.4)、(2.5)及(2.6)、(2.7)计算 $\hat{Q}_k, \hat{R}$ 及 $\tilde{Q}_k, \tilde{R}$ 。
- 6° 若 $|R^{(N+1)} - R^{(N)}| < \epsilon_1, |Q^{(N+1)} - Q^{(N)}| < \epsilon_2, |\tilde{R}^{(N+1)} - \tilde{R}^{(N)}| < \epsilon_3, |\tilde{Q}^{(N+1)} - \tilde{Q}^{(N)}| < \epsilon_4$

同时满足预先指定的精度 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 则结束, 否则转入下步。

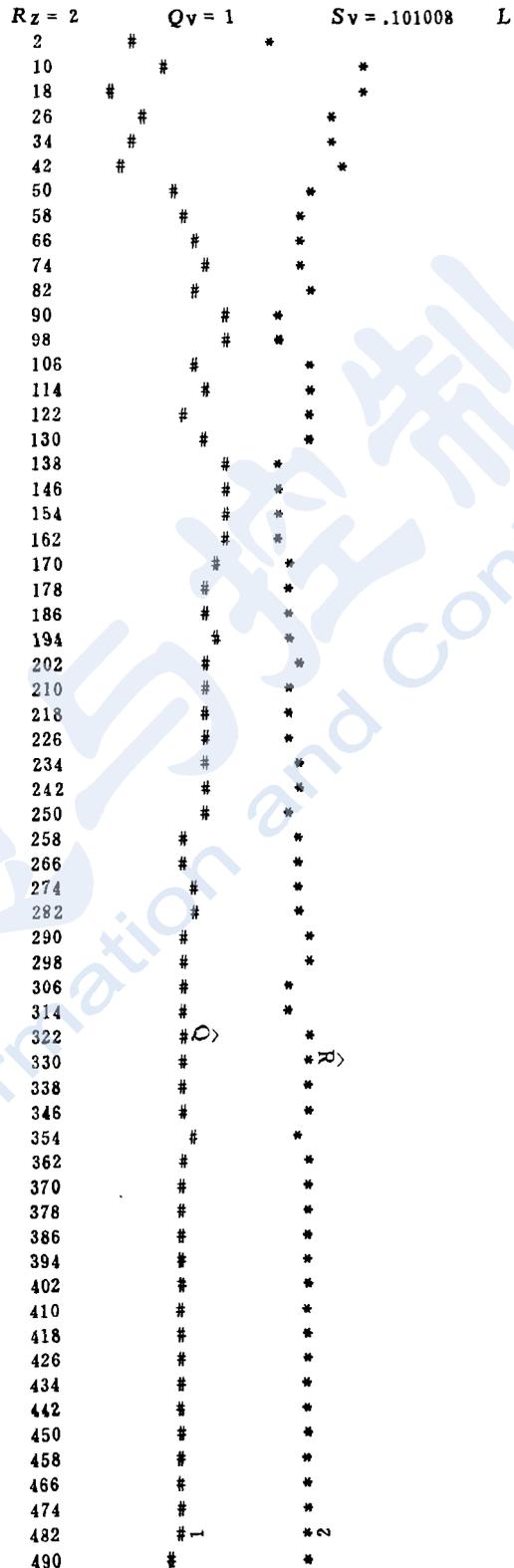
- 7° 用 $N \leftarrow N + 1$ 返回2°。

### 三 数值模拟结果

例 给出(2.9)形式的跟踪系统, $v_k$ 与 $z_k$ 不是不相关的, 其相关协方差 $S_{,,}$ 已知或未知, 使用ALPHA计算机, 模拟结果如附图1、图2所示, 图1对应 $S_{,,} = 0.10$ , 图2对应 $S_{,,} = 0.02$ 。

#### 参考文献

- [1] 徐建华等编著, 状态估计和系统识别, 科学出版社, 1981年。
- [2] Mehra, R.K., IEEE Trans., Automat. Contr., AC-17 (1972), No.5, 693-698.
- [3] Myer, K.A. and Tapley, B.D., IEEE Trans., Automat. Contr., AC-21(1976), No.4, 520-523
- [4] Leathrum, J.F., IEEE Trans., Automat. Contr., AC-26(1981), No.3., 745-746.
- [5] Jenkins, G.M. and Watts, D.G., Spectral Analysis and Its Application, San Francisco: Holden Dey Publ, 1968.
- [6] Parzen, E., Ann. Math. Stat., Vol.32, Dec., (1961), 951~989.



附图1 真值 $R = 2, Q_v = 1, S_v$ 未知时 $\hat{R}, \hat{Q}$ 的情况

彩色选择开关。矩阵电路用来给每条彩色线分配不同颜色，这是通过改变  $R$ 、 $G$ 、 $B$  三路输入电压的比例实现的。

#### 四 实验结果

研制的显示控制器（包括 32K 图象存储器）的实物照片见图11。屏幕上显示的伪彩色图象照片见图12。

在伪彩色显示终端上进行了分色，提花织物配色、图象灰度级直方图处理和图象编辑等实验，收到了预期效果。希望该系统能对纺织工业使用图像处理技术起积极推动作用，在其它科技领域中获得应用。

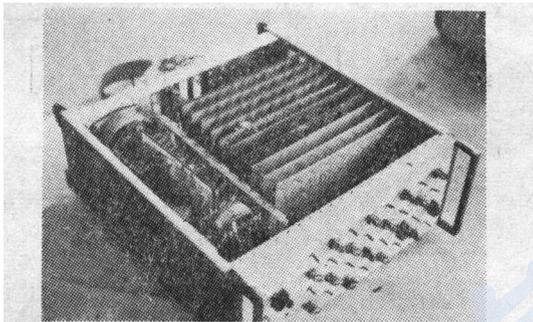


图11 显示控制装置



图12 伪彩色图象照片

#### 参 考 文 献

- [1] 冈萨雷斯 R.C., 温茨 P., 数字图象处理, 1977, pp.180—192.
- [2] 吉田 厚, TVカメラによる静止画像入力装置の制作, トランジスタ, Vol.18(1981), No.1, pp.363—375.
- [3] 木下 健治, 画像入出力装置への応用, エレクトロニクス ダイジェスト, 10/11 (1979), pp.5—16.
- [4] Courtney, D.A., Ryan, W.D., A Low Cost Colour Graphics Terminal, Electronic Technology, Vol.12 (1978), No.5, pp.113—115.

(上接52页)

$R = 1$	$Q_V = .1$	$S_V = 2.2586E-2$
2	#	*
10	#	*
18	#	*
26	#	*
34	#	*
24	#	*
50	#	*
58	#	*
66	#	*
74	#	*
82	#	*
90	#	*
98	#	*
106	#	*
114	#	*
122	#	*
130	#	*
138	#	*
146	#	*
154	#	*
162	#	*
170	#	*
178	#	*
186	#	*
194	#	*
202	#	*
210	#	*
218	#	*
226	#	*
234	#	*
242	#	*
250	#	*
258	#	*
266	#	*
274	#	*
282	#	*
290	#	*
298	#	*
306	#	*
314	#	*
322	#	*
330	#	*
338	#	*
346	#	*
354	#	*
362	#	*
370	#	*
378	#	*
386	#	*
394	#	*
402	#	*
410	#	*
418	#	*
426	#	*
434	#	*
442	#	*
450	#	*
458	#	*
466	#	*
474	#	*
482	#	*
490	#	*

附图2 真值  $R=1, Q_V=0.1, S_V$  已知时  $\hat{R}, \hat{Q}$  的情况