

用逆推法建立二次型最优调节系统*

吴源达 程平

(武汉钢铁学院)

(摘要) 本文用根轨迹法根据预期极点位置确定反馈阵 K ,由 K 求出 P 的部分行向量,从而使非线性Riccati方程蜕化为线性方程式。然后,根据不大于 $n(n+1)/2$ 个线性方程式,验算对角阵 Q 的非负定性。如果 $Q \geq 0$ 成立,则表明由 K 构成的控制律 $u(t) = -Kx(t)$ 是使二次型性能指标 J 为最小的最优控制律,相应的闭环系统是上述 Q 条件下的二次型最优系统,并且具有预期的极点配置。文中以SCR-D调速系统为例,说明本法计算简单,实验结果与理论相符。

引 言

SCR-D 调速系统的应用十分广泛。实验表明,采用全状态反馈,以二次型性能指标综合这种系统,其控制或扰动响应都十分理想。然而,用传统方法设计二次型系统,要多次预选 Q 阵,并用计算机反复求解非线性Riccati方程,才能获得满意结果。

本文介绍包括SCR-D调速系统在内的一切单输入线性定常系统,都可把建立二次型最优系统的计算顺序颠倒过来,从而得到一种计算简便的工程方法。

设有 (A, b) 能控单输入系统

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (1)$$

首先用根轨迹法确定预期极点 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 及反馈阵

$$K = b^T P = [K_i] \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

然后,把(2)代入Riccati方程

$$PA + A^T P - Pbb^T P + Q = PA + A^T P - Pbk + Q = 0 \quad (3)$$

如果由(2)、(3)解出的对角阵

$$Q = \text{diag}[q_{ii}] \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

成立,则表明由 K 构成的控制律

$$u = -Kx \quad (5)$$

是使上述 Q 条件下的二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^2) dt \quad (6)$$

为最小的最优控制律,而预期极点 λ_i 是满足二

次型最优的极点配置。

以上的计算顺序是 $\lambda-K-Q$,跟传统的顺序相反,故名逆推法。这种方法的特点是先确定 K ,这样,Riccati方程便蜕化为如式(3)所示的线性方程,因此,只要计算不大于 $n(n+1)/2$ 个线性方程,即可验算 Q 的非负定性。通常,一次手算,即得满意结果。特别对于SCR-D调速系统,这种系统的 $n=3$,且系数阵 A 简单,故可划出 K 参数空间最优区,利用最优区,可灵活选择反馈阵 K ,建立二次型最优系统,对现场调试系统,特别方便。

一 用根轨迹法确定 K

把(5)代入(1),得闭环系统

$$\dot{x} = (A - bK)x \quad (7)$$

其特征方程为

$$|SI - A + bK| = 0 \quad (8)$$

因为系统(1)的 (A, b) 能控,故总能找到满足 (A, K) 能测的适当 K 阵,以使(8)的 n 个根任意配置。因此,可根据预期的闭环极点 λ_i ,用根轨迹法确定反馈阵 K 。今以单输入三阶系统为例,加以说明。

设系统(1)的

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (9)$$

* 收到本文的时间是1983年3月28日。

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ b_3]^T \quad (10)$$

$$\text{反馈阵 } \mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3] \quad (11)$$

把以上三式代入(8), 得绘制根轨迹的方程式

$$b_3 [K_1 (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} + a_{13}s) + K_2 (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} + a_{23}s) + K_3 (s^2 - a_{11}s - a_{22}s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})] = -|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \quad (12)$$

上式表明, 绘制根轨迹的参数有三个: K_1 , K_2 和 K_3 。可首先设定 K_3 不大于实际允许的上限值。然后, 用根轨迹法按预期极点位置依次确定 K_2 和 K_1 。

确定 \mathbf{K} 后, 把它代入(2), 并令 \mathbf{P} 为对称阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} \quad (13)$$

于是, 由(2)和(10)可算得 \mathbf{P} 的第三个行向量

$$[P_{13} \ P_{23} \ P_{33}] = [K_1 \ K_2 \ K_3]/b_3 \quad (14)$$

二 验算 Q 的非负定性

假设

$$\mathbf{Q} = \text{diag}[q_{11} \ q_{22} \ q_{33}] \quad (15)$$

把(9), (10), (13)和(15)代入(3), 即得

$$q_{11} = b_3^2 P_{13}^2 - 2(a_{11}P_{11} + a_{21}P_{12} + a_{31}P_{13}) \quad (16)$$

$$q_{22} = b_3^2 P_{23}^2 - 2(a_{12}P_{12} + a_{22}P_{22} + a_{32}P_{23}) \quad (17)$$

$$q_{33} = b_3^2 P_{33}^2 - 2(a_{13}P_{13} + a_{23}P_{23} + a_{33}P_{33}) \quad (18)$$

$$(a_{12}P_{11} + a_{22}P_{12} + a_{32}P_{13}) + (a_{11}P_{12} + a_{21}P_{22} + a_{31}P_{23}) = b_3^2 P_{13}P_{23} \quad (19)$$

$$(a_{13}P_{11} + a_{23}P_{12} + a_{33}P_{13}) + (a_{11}P_{13} + a_{21}P_{23} + a_{31}P_{33}) = b_3^2 P_{13}P_{33} \quad (20)$$

$$(a_{13}P_{12} + a_{23}P_{22} + a_{33}P_{23}) + (a_{12}P_{13} + a_{22}P_{23} + a_{32}P_{33}) = b_3^2 P_{23}P_{33} \quad (21)$$

上式的 P_{13} , P_{23} , P_{33} 已被(14)确定, 故以上是六个线性方程式, 不难验算 q_i ($i=1, 2, 3$)。

三 应用举例

三相全控桥可控硅-电动机 (SCR-D) 调速系统的结构图如图1。电动机参数: 1.5KW, 10A, 1000rpm, $C_e = C_m = 0.13$, $GD^2 = 0.33\text{kg}\cdot\text{M}^2$, $T_d = 0.016\text{sec}$, $R_d = 2.3\Omega$, $\tau_0 = 0.003\text{sec}$, $K_{SCR} = 45\text{V/V}$ 。

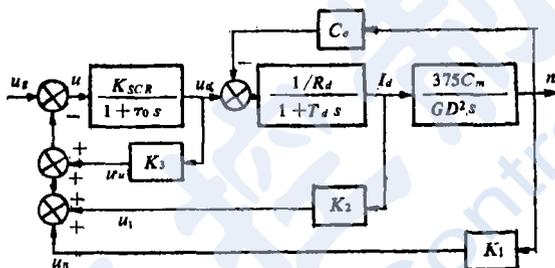


图1 SCR-D 系统结构图

由图1得开环系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (22)$$

$$\text{式中 } \mathbf{x} = [n \ I_a \ u_a]^T \quad (23)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 375C_m/GD^2 & 0 \\ -C_e/T_d R_d & -1/T_d & 1/T_d R_d \\ 0 & 0 & -1/\tau_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 147.4 & 0 \\ -3.53 & -62.5 & 27.1 \\ 0 & 0 & -333 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ b_3]^T \quad (25)$$

$$b_3 = K_{SCR}/\tau_0 = 15000 \quad (26)$$

当接入反馈阵 $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$ 如图1, 得闭环系统特征方程

$$s^3 + (396 + b_3 K_3)s^2 + b_3(1.42 + 27.1K_2 + 62.5K_3)s + b_3(11.54 + 3994K_1 + 520K_3) = 0 \quad (27)$$

1. 用根轨迹法确定 λ_i ($i=1, 2, 3$) 及 $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$; 为便于绘制根轨迹, 把(27)改写为

$$1/G(s) = -1/K_s \quad (28)$$

$$\text{式中 } G(s) = sG_1(s) = s[s^2 + (396 + b_3 K_3)s + K_s] \quad (29)$$

$$K_a = b_3(1.42 + 27.1K_2 + 62.5K_3) \quad (30)$$

$$K_g = b_3(11.54 + 3994K_1 + 520K_3) \quad (31)$$

先求(29)中

$$G_1(s) = s^2 + (396 + b_3K_3)s + K_a = 0 \quad (32)$$

的二根。因为可控硅整流电压最大值 $u_{um} = 250V$, 规定最大反馈电压 $u_{um} = 4.5V$, 由此确定

$$K_3 = u_{um}/u_{am} = 0.018 \quad (33)$$

把(26), (33)代入(32), 作 $G_1(s)$ 的根轨迹如图2。取电流环的预期极点为重根, 即 $-\lambda_{11} = -\lambda_{12} = -333$, 对应的 $K_a = \lambda_{11}^2 = 333^2$ 。

把 K_a 代入(30), 即得电流反馈系数

$$K_2 = 0.178 \quad (34)$$

把 $G_1(s) = (s + 333)^2$ 代入(29), 再根据(28)作系统根轨迹如图3。当取预期主导极点为

$$-\lambda_1 = -\lambda_2 = -111 \quad (35)$$

则第三个极点为

$$-\lambda_3 = -444 \quad (36)$$



图2 $G_1(s) = 0$ 的根轨迹

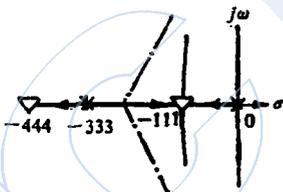


图3 $G(s) + K_g = 0$ 的根轨迹

对应的根轨迹放大系数

$$K_g = 4 \times 111^3 \quad (37)$$

把(26), (33)和(37)代入(31), 得速度反馈系数

$$K_1 = 0.086 \quad (38)$$

由此得反馈阵

$$K = [0.086 \quad 0.178 \quad 0.018] \quad (39)$$

2. 校验 Q 的非负定性: 把(14), (24)

和(25)代入(16)~(21), 整理后得

$$q_{11} = 1/b_3[0.92K_2 + (86.8 + 0.26b_3K_3)K_1] + K_1^2 \quad (40)$$

$$q_{22} = (1788/b_3 + K_2 + 4.6K_3)K_2 - (4305/b_3 + 10.88K_3)K_1 \quad (41)$$

$$q_{33} = 1/b_3(666K_3 + b_3K_1^2 - 54.2K_2) \quad (42)$$

把(39)代入上式, 得

$$Q = 1/b_3 \text{diag}[124.6 \quad 391.7 \quad 7.2] \geq 0 \quad (43)$$

由此验证, 根据(39)规定的反馈阵 K 构成的闭环系统确是二次型最优系统, 对应的权矩阵如(43)式所示。

显然, 对于给定的控制对象, 构成最优控制律的反馈阵 K 的个数应是无限的。就本例来说, 已设计的反馈阵 K , 无论在工程实现方面或控制响应方面, 也不见得最好。为此, 最好能把满足二次型最优的一切反馈阵找出来, 以供调试系统时, 根据实际情况灵活选用。以下介绍, 对于三阶系统, 在 K 参数空间可划出二次型最优区, 最优区内任一点 M_i , 即是一个满足二次型最优的供选用的反馈阵 K_i 。

四 K 参数空间最优区的作法及应用

最优区的作法见附录。以下介绍如何利用最优区, 选择反馈阵 K 。

图4所示一簇锥体分别是 $b_3q_{33} = 0, 3, 6 \dots$ 的最优区。只要参数 K 落在区内, 则表明 $Q \geq 0$ 。若有必要, 还可利用最优区, 求得相应的 q_{22}, q_{33} 值。至于 q_{11} 已由(40)求得, 只要 K 非负, 必有 $q_{11} \geq 0$ 。

假设图1所示系统的反馈阵为

$$K = [0.16 \quad 0.24 \quad 0.018] \quad (44)$$

$$\text{或 } b_3K = [2400 \quad 3600 \quad 270] \quad (45)$$

以此对应, 在 K 空间可画出点 M_1 (图4)。显然, 点 M_1 位于最优区内, 这表明由(44)式所示 K 阵构成的系统是二次型最优系统。

一般可不必进一步计算 Q 的具体数值, 如有必要, 可利用最优区求得 Q 阵。

根据 M_1 的侧向投影可知： $\Delta = r_0 r_2 = 1075$ ，
代入附录(A.3)，得

$$b_3 q_{33} = 3.88 \quad (46)$$

为计算 $b_3 q_{12}$ 值，先用比例法近似求出 $\Delta' = r_2 r_3 / r_1 r_3$ ， $ab = 870$ ，再把 Δ' 代入(A.6)式，得

$$b_3 q_{22} = 420 \quad (47)$$

至于 $b_3 q_{11}$ ，可把(44)代入(40)，即得

$$b_3 q_{11} = 409 \quad (48)$$

由此得与(44)式 K 阵对应的权矩阵

$$Q = (1/b_3) \text{diag}[409 \ 420 \ 3.88] \geq 0 \quad (49)$$

现在再利用最优区验算(39)式所示的 K 阵是否能构成最优控制律。根据(39)，在图4可画出点 M_2 ，显然 M_2 在最优区内，故由 K 构成的必是二次型最优系统。

以下介绍怎样根据式(44)构成工程上可以实现的系统。因为图1的给定电压 $U_g \leq 10V$ ，故(44)中所选 $K_1 = 0.16$ 太大。令 $K_1 = K_{10} K_{11}$ ，取 $K_{10} = 0.01$ ， $K_{11} = 16$ ，由此得结构图如图5，图6是对应的原理图。图7是实验示波曲线，结果与理论相符。

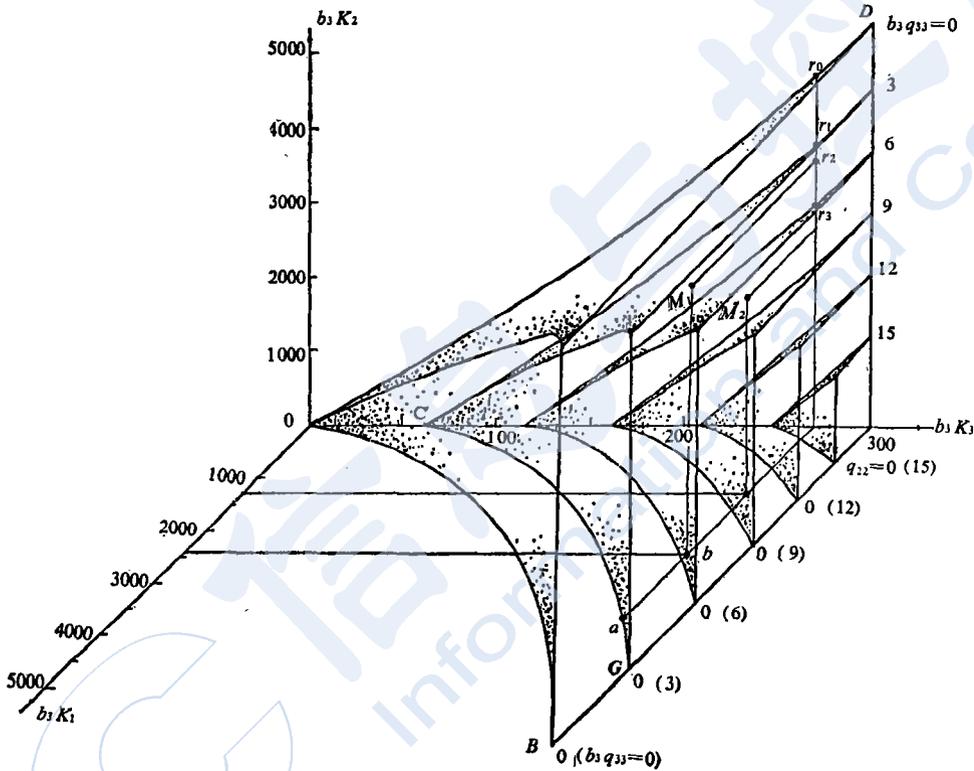


图4 K参数空间最优区

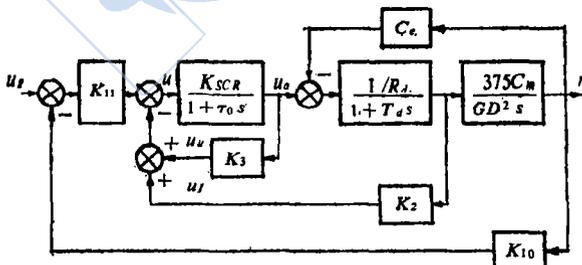


图5 SCR-D系统结构图

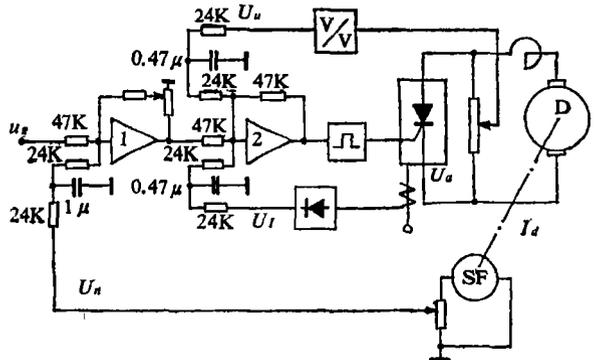


图6 SCR-D系统原理图

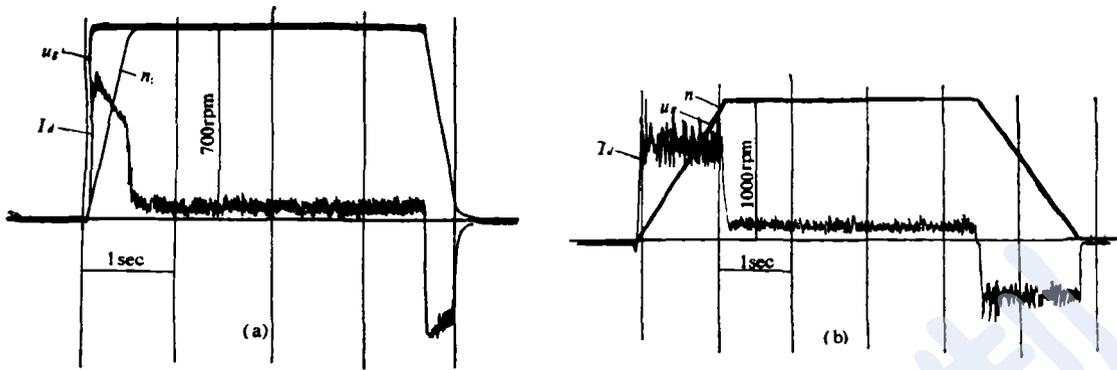


图7 实验示波曲线

小 结

1. 用根轨迹法确定极点 λ_i 及反馈阵 K 时, 应从内环逐步扩向外环 (图1)。

2. 确定 K 后, 再根据不大于 $n(n+1)/2$ 个线性方程式去验算 Q 的非负定性。若 $Q \geq 0$, 则系统最优。因为 K 是根据预期极点 λ_i 解出的, 所以由 K 解出的 Q 往往是非负定律。通常, 只要手算一遍, 即得满意结果。

3. 因为由 K 解得的 $Q = \text{diag}[q_{ii}] \geq 0$, 故与 K 对应的 λ_i 是二次型最优极点配置, 相应系统的性能, 必须具备二次型最优系统的优点。

4. 用根轨迹法确定 K 时, 一开始即考虑到反馈量的上限值, 故在设计终了, 不会产生因 K 值偏大而不能实现的问题。

5. 对于 SCR-D 三阶系统, 可作最优区。这样, 在设计及调试系统时, 可灵活选择 K 阵, 以便获得满意结果。

6. 对于单输高阶系统, 也可采用本法建立二次型最优系统。

附 录

把 (42) 改写为

$$b_3 K_2 = b_3 K_3 (666 + b_3 K_3) - b_3^2 q_{33} / 54.2 \quad (A.1)$$

令 $q_{33} = 0$, 则由上式可在 $b_3 K_2, b_3 K_3$ 平面上作 $q_{33} = 0$ 的界线 OD (图4)。 OD 以下满足 $q_{33} > 0$ 。并且由 (A.1) 可知, OD 下任一点到

OD 的距离为

$$\Delta = b_3^2 q_{33} / 54.2 \quad (A.2)$$

故只要量得 Δ 值, 即得该点的

$$b_3 q_{33} = 54.2 \Delta / b_3 \quad (A.3)$$

因此, 不难由 (A.1) 作 $b_3 q_{33} = 3, 6, \dots, 15$ 的界线如图4。

再改写 (41) 为

$$b_3 K_1 = b_3 K_2 (4.6 b_3 K_3 + b_3 K_2 + 1788) - b_3^2 q_{22} / 4305 + 10.88 b_3 K_3 \quad (A.4)$$

令 $q_{22} = 0$, 则根据 (A.1), (A.4) 可在 $b_3 K_1, b_3 K_3$ 平面上分别作 $q_{22} = 0$, 但 $b_3 q_{33} = 0, 3, 6, \dots, 15$ 的界线 (图4)。当 $b_3 q_{33} = 0$, 则 OB 以右满足 $q_{22} > 0$; $b_3 q_{33} = 3$, 则 CG 以右, 满足 $q_{22} > 0$, 余类推。

由 (A.4) 可知, OB, CG 等界线右侧任一点到这些界线的距离为

$$\Delta' = b_3^2 q_{22} / 4305 + 10.88 b_3 K_3 \quad (A.5)$$

故只要量出 Δ' 值, 即得该点的

$$b_3 q_{22} = \Delta' (4305 + 10.88 b_3 K_3) / b_3 \quad (A.6)$$

参 考 文 献

- (1) Kalman, R.E., When is a Linear Control System Optimal? Trans. ASME, Basic Eng, Vol.86, Mar., 1964.
- (2) Tyler, J.S., The Use of a Quadratic Performance Index to Design Multivariable Control Systems, IEEE Trans, Automatic Control, Vol.11, No.1, 1966.

the computer decoupling system design method and the notable points of a double variable system. (p.16)

A Recursive Algorithm for Synthesizing an Optimal Quadratic Control System

Wu Yuanda Cheng Ping

In this paper the feedback matrix K is determined according to the desired pole location by means of the root-locus method. From K we obtain a row of the matrix P , which makes the nonlinear Riccati equation a linear one. Then the property of the matrix Q is examined with no difficulty. If $Q \geq 0$, it means that the control law $u(t) = -Kx(t)$ is an optimal one, which minimizes the value of the quadratic performance index J and so the related closed-loop system is an optimal quadratic one considering Q given above. And it gives a desired pole configuration. A SCR-D system is given as an example, which shows that the calculation of this method is simple. (p.20)

中国自动化学会电气自动化专业委员会1983年学术会议部分论文目录

中国自动化学会电气自动化专业委员会于1983年10月在济南召开了“直流传动学术交流会”，现将会上交流的55篇论文目录部分摘录于下。

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 2800KW可控硅供电快速可逆系统的应用研究 | 段文泽 重庆建筑工程学院 |
| 符致淳等 天津电气传动所 | 进一步缩小逻辑无环电流零流死区的试验 |
| 怎样选择大功率直流电动机可控硅供电装置的容量 | 冯世墙等 天津电气传动所 |
| 冯世墙等 天津电气传动所 | 二阶系统的二次型性能指标的物理特性 |
| 影响大功率可控硅供电装置出力的主要因素及今后 | 项国波 福州大学 雷迅 中科院武汉数学物理所 |
| 改进意见 冯世墙等 天津电气传动所 | 非线性采样控制系统的一种描述函数法 |
| 带活套与张力辊的卷取机线速度自动调节系统 | 王燕霞等 陕西机械学院 |
| 丁慎栋等 上钢一厂 | 一种具有超稳定性的模型参考自适应控制系统 |
| 印染联合机主传动系统的类型及设计方法探讨 | 的设计方法 藏瀛芝等 东北重型机械学院 |
| 陈振翼 天津纺织工学院 | 带间隙随动系统的非线性变结构调节器的综合 |
| 数字给定-鉴频锁相积分补偿式可逆调速系统 | 孔伟志 吉林工大 |
| 夏新顺等 上海工大 | 线性状态反馈直流调速系统的一种设计方法 |
| 直流系统大功率晶体管PWM的研究 | 常春馨 山东工学院 |
| 王殿方等 吉林工大 李汉良等 铁道部长春客车厂 | 速度自适应观测器在直流调速系统中的应用 |
| 小功率直流随动系统的微处理器双模控制 | 安焯 上海建筑工业专科学校 |
| 张曾科等 清华大学 | 胡文瑾 上海交大 |
| 微计算机在电机调速系统中的应用及设计 | 徐伟国 上海宝钢冷轧厂 |
| 商小军 福州第二化工厂设计院 | 高性能的频率电压变换器之研制及其在调速系统中的应 |
| 张力微计算机控制系统 藏瀛芝等 东北重型机械学院 | 用效果 |
| 田作斗等 天津电气传动所 | 大功率脉冲列触发装置 |
| 顾月全等 天津电气传动所 | 电控设备干扰的产生和抑制 |
| 陈贤明等 水电部南京自动化所 | 钱湘麟 沈阳重型机器厂 |
| 快速系统中电流变化率非线性控制的研究报告 | 许荣生 江西涤纶厂 |