

奇异值分解法及其在辨识和控制中的应用*

张洪钺

(北京航空学院)

〔提要〕 奇异值分解法是数值计算中的一个重要方法，目前在控制领域中正在得到日益广泛的使用。本文概要说明，在数字计算机上进行运算时，计算结果受机器浮点数系统精度的影响，其程度与计算问题本身是病态或常态，以及所用计算方法是否稳定有关。进而说明奇异值分解法是一种非常有效的数值方法。介绍了奇异值分解定理，奇异值和奇异向量的一些基本性质。最后说明奇异值分解法在系统辨识和控制设计中的若干应用。

一 引言

在控制工程领域中，奇异值分解法(SVD-Singular Value Decomposition)正成为一句时髦话。Klema和Laub⁽¹⁾在1980年曾预言：在今后5至10年内，奇异值分解法将成为控制和系统工程（特别是线性系统）的最重要的研究工具之一。

奇异值分解法最早来源于数值分析，特别是数值线性代数。19世纪70年代Beltrami和Jordan⁽²⁾首先对实正方形矩阵建立了奇异值分解法，以后Autonne⁽³⁾对复数正方形矩阵，Eckert和Young⁽⁴⁾对长方矩阵建立了奇异值分解法。奇异值分解法之所以在控制工程中得到日益广泛的应用，是因为控制系统走向高级和复杂，如对多变量控制等问题的研究，必然导致对矩阵计算问题的重视。另一方面，由于数字计算机的日益推广，也引起了人们对计算的精度和算法的稳定性等问题的关心。我们可以看到，一方面数值计算和软件专家的研究成果在控制工程中得到了应用，另一方面，不少控制工程中的问题又刺激了对数值计算方法和软件的研究，如对可控阵和可观测阵秩的计算研究⁽⁵⁾。

二 浮点计算和算法的稳定性问题

不是任何实数都可以在数字计算机上精确地表示出来，由于舍入和截断，只能近似地表示。因此控制系统的模型参数和输入输出数据的表示有误差，计算也就不能精确地实现。在

数字计算机上所用的一组浮点数 F 可用如下参量表示⁽⁶⁾：基数 β （在二进制中等于2），精度 t 和指数 e 的范围 $[L, U]$ 。在浮点数系统 F 中，任一浮点数 y 可表示为

$$y = \pm (d_1/\beta^1 + d_2/\beta^2 + \dots + d_t/\beta^t)\beta^e \quad (1)$$

这里，整数 d_1, \dots, d_t 满足

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1 \quad (i = 1, \dots, t)$$

指数 e 满足

$$L \leq e \leq U$$

浮点数集合 F 是一个不连续的有限集，它只有 $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1$ 个数。因此，并不是任何实数都可用浮点数精确表示的。譬如十进制中的实数 $1/10$ 在二进制中要用无穷循环小数来表示：

$$1/10 = 0/2^1 + 0/2^2 + 0/2^3 + 1/2^4 + 1/2^5 + 0/2^6 + 0/2^7 + \dots$$

当浮点数精度为 t 时，上式右端到 t 项后就终止了。设实数为 x ，其最精确的浮点数为 $fl(x)$ ，

则实数 x 在浮点数中表示的相对精度为

$$|[fl(x) - x]/x| \leq (1/2)\beta^{1-t} \quad (2)$$

所以， β^{1-t} 可以作为对机器相对算术精度的一个估计。精确的机器精度与 β^{1-t} 有关，也与一些复杂细节（如舍入的形式）有关，下面给出几种数字计算机浮点系统的数据。

| 计算机 | β | t | L | U | β^{1-t} |
|---------------------|---------|-----|------|-----|------------------------|
| Univac1180 | 2 | 27 | -128 | 127 | 1.49×10^{-8} |
| Honeywell6000 | 2 | 27 | -128 | 127 | 1.49×10^{-8} |
| PDP-11 | 2 | 24 | -128 | 127 | 1.19×10^{-7} |
| IBM360和370 (短精度) | 16 | 6 | -64 | 63 | 9.54×10^{-7} |
| IBM360和370 (长精度) | 16 | 14 | -64 | 63 | 2.22×10^{-16} |

* 收到本文的时间是1982年1月3日。

下面谈谈计算问题的灵敏度和算法的稳定性问题⁽⁷⁾。有些计算问题对数据的误差非常灵敏。这是计算问题本身具有的性质，与所用的算法无关。我们用 f 表示一个计算问题， d 表示数据， $d \in D$ ， D 是某个数据的集合。 $f(d)$ 就是对 d 的计算结果。在实际中，我们只有 d 的近似表达值 d^* ，则当 $f(d)$ 与 $f(d^*)$ 相差很远时，我们称这个计算问题是病态的或者对数据是灵敏的；当 $f(d)$ 与 $f(d^*)$ 接近时，则称为是常态的或对数据是不灵敏的。设 f^* 表示执行计算问题 f 的一种算法。我们不能要求一种算法运用到病态的计算问题上可以得到比数据所保证的精度还高，但算法本身不应该引进误差。所以，我们要求算法 f^* ，当 $d^* \approx d$ 时，有

$$f^*(d) \approx f(d^*)$$

这里， $f(d^*)$ 是数据扰动后的精确解，这样的算法称为是稳定的。当稳定算法应用到常态问题时， $f^*(d) \approx f(d^*) \approx f(d)$ 。图 1 表示稳定的算法应用到常态问题，图 2 则表示稳定的算法应用到病态问题。

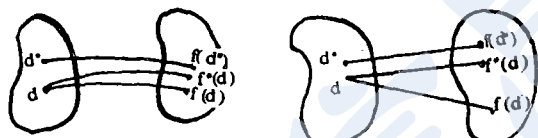


图 1

图 2

三 矩阵的数值秩和奇异值分解

1. 矩阵的数值秩

在辨识和控制问题中经常碰到决定某个矩阵秩的问题，而奇异值分解法是目前决定秩的唯一可靠方法。考虑下面的线性方程组 $AX = b$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \vdots \\ 1/2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2^{n-1} \\ -1/2^{n-1} \\ \vdots \\ -1/2^{n-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的特征值全部等于 -1 ，离开零很远。 A

的行列式是 $(-1)^n$ 也不等于零。但实际上这个矩阵却是非常接近于奇异的。当输入 $X^T = [1, 1/2, \dots, 1/2^{n-1}]$ 时，得到趋近于零的输出 b 。因此，特征值不是对矩阵接近奇异性的可靠度量。在控制理论中，特征值不是对稳定裕度的可靠度量。进一步，如果矩阵的元受到扰动，例如把第一列的每个元加上 $1/2^{n-1}$ ，我们可以得到一个精确的奇异矩阵。因此，特征值对这个矩阵参数的变化是敏感的，即是一个病态问题。奇异值则没有特征值的这些缺点。

2. 奇异值分解定理^(1,7)

设 $A \in R^{m \times n}$ ，则存在实正交矩阵 $U \in R^{m \times m}$ 和 $V \in R^{n \times n}$ ，使 A 可分解成

$$A = UV^T \quad (3)$$

这里
$$\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad (5)$$

而 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

证明：因为 $A^T A$ 是半正定的，它的特征值 $\lambda_i(A^T A)$ 是非负的，设可表示为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ ，而 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ， $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ 。即 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。设 u_1, u_2, \dots, u_n 是相应于 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ 的一组正交向量。

$$V_1 = (u_1, u_2, \dots, u_r)$$

$$V_2 = (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n)$$

而 $V = (V_1 | V_2)$

则当 $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ 时，有

$$(A^T A)V_1 = V_1 S^2$$

由此可得

$$S^{-1}V_1^T A^T A V_1 S^{-1} = I \quad (6)$$

同理， $(A^T A)V_2 = V_2 0$ ，所以， $V_2^T A^T A V_2 = 0$ ，即 $AV_2 = 0$ 。令 $U_1 = AV_1 S^{-1}$ ，则由 (6) 式， $U_1^T U_1 = I$ ，所以 U_1 也是正交的。再选择 U_2 ，使得 $U = (U_1 | U_2)$ 是正交的。这样

$$\begin{aligned} U^T A V &= \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} A (V_1 | V_2) \\ &= \begin{pmatrix} U_1^T A V_1 & U_1^T A V_2 \\ U_2^T A V_1 & U_2^T A V_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} S & 0 \\ U_2^T U_1 S & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \quad (7)
 \end{aligned}$$

在推导(7)式中,利用了事实: $AV_2=0$, 以及 U_1, U_2 正交。由(7)式马上可得到(3)式, 即 $A=U\Sigma V^T$ 。

当 A 是复数矩阵 (在多变量系统频率法中经常遇到复数矩阵), 设 $A \in C^{m \times n}$, 则有

$$A = U \Sigma V^H \quad (7')$$

这里, Σ 与(4)式相同, 但 U 和 V 是酉矩阵, H 表示复共轭转置。

式(3)或(7')称为 A 的奇异值分解。量 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 以及 $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ 叫做 A 的奇异值。 U 的列称为 A 的左奇异向量 (AA^T 或 AA^H 的正交特征向量), V 的列称为 A 的右奇异向量 ($A^T A$ 或 $A^H A$ 的正交特征向量)。非零奇异值的个数 r 决定了矩阵 A 的秩, 即

$$r = \text{rank}(A) \quad (8)$$

但是,在实际数值计算时,由于数据本身的精度以及计算机浮点计算的精度,我们常不能清晰地得到,从奇异值排列中某一个开始起,所有的奇异值精确地为零。为此规定一个容差(零阈) $\tau > 0$, 当奇异值 $\sigma < \tau$ 时, 认其为零。矩阵的数值秩就等于所有大于 τ 的奇异值的数目。 τ 可以有不同的表述方法,但它应反映数据的精度和计算机的精度。例如, τ 可写成⁽⁶⁾

$$\tau = \Delta \cdot \sigma_1$$

这里, σ_1 是最大的奇异值, Δ 是相对误差容限。例如, 已知数据只精确到三位有效数字, 则可令 $\Delta = 10^{-3}$ 。如果数据是精确的, 则 τ 就应该反映计算中的舍入误差。显然, 最小的奇异值 σ_r 还给出了矩阵秩离 $r-1$ 的距离。因为 σ_r 的值与比例尺的选取有关, 所以 σ_r/σ_1 将更能反映矩阵秩离 $r-1$ 的距离。

因为 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$, 也许有人会想到用计算 $A^T A$ 的特征值的方法来计算奇异值, 但从数值计算的角度来看,这不是一种好办法。幸运的是, 现在已有很有有效的算法和现成的程

序来计算奇异值和奇异向量。例如 SVD⁽⁶⁾, EISPACK 中的子程序 MINFIT 和 SVD^(8,9) 和 LINPACK⁽¹⁰⁾。

3. 奇异值分解法的一些性质

(1) 奇异向量的分解⁽⁶⁾ (子空间的分解)

A 的零空间是 x 的集合, 满足 $Ax=0$ 。 A 的值域是 b 的集合, 满足 $Ax=b$ 有一解 x 。由式(7)可得

$$A = (U_1, U_2) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

$$A(V_1, V_2) = (U_1 S, 0)$$

$$\text{或} \quad AV_1 = U_1 S \quad (9)$$

$$AV_2 = 0 \quad (10)$$

由式(9)和(10)可知

- V_2 是 A 的零空间中的正交基。
- V_1 是 A 的零空间的正交补空间中的正交基。
- U_1 是 A 的值域中的正交基。
- U_2 是 A 的值域的正交补空间中的正交基。

(2) 奇异值的一些性质^(11,12)

为书写简便起见, 令 $\bar{\sigma} = \sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\underline{\sigma} = \sigma_{\min}$ 。下面列出奇异值的一些性质:

$$a. \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad (\text{或} \sqrt{\lambda_i(A^H A)}) \quad (11)$$

当 A 为实对称矩阵 (或 Hermitian 矩阵时), $A^T A = A^2$ (或 $A^H A = A^2$), 则 $\sigma_i = |\lambda_i|$, λ_i 是 A 的特征值。

$$b. \quad \|A\|_2 = \bar{\sigma} = \sigma_1 \quad (12)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2} \quad (13)$$

这里, $\|A\|_2$ 是 2-范数, $\|A\|_F$ 是 Frobenius 范数。

$$c. \quad \sigma(A) = 1/\bar{\sigma}(A^{-1}), \quad A^{-1} \text{ 存在} \quad (14)$$

$$d. \quad \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \quad (15)$$

$$\underline{\sigma}(AB) \geq \underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \quad (16)$$

$$e. \quad \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (17)$$

$$f. \quad \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(\Delta A) \geq \underline{\sigma}(A + \Delta A) \geq \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(\Delta A) \quad (18)$$

$$g. \quad A^+ = V \Sigma^+ U^T \quad (19)$$

式中

由式(27)可知, 如果返差矩阵的逆阵 $(I + GK)^{-1}$ “小” 则误差 e 也“小”。在单变量系统中一个标量小的概念是很容易理解的。也就是我们要求复数标量 $[1 + g(j\omega)k(j\omega)]^{-1}$ 的模小, 即 $|1 + g(j\omega)k(j\omega)|$ 大; 这是大家熟知的提高开环增益可减小系统误差的结论。但对一个矩阵来讲用什么量来表示它的“尺寸大小”却不那么直观。从控制系统的观点来看, 具有物理意义的对系统矩阵“尺寸”的度量应该与系统的输出输入比, 即增益有关。设输入向量 x 被系统矩阵 A 变换后得到输出向量 y , y 的范数(长度)可能与 x 的大不相同。系统增益可表示为

$$\frac{\|y\|}{\|x\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

这里, $\|x\| = (x^T x)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$ 。这个增益是随着 x 的选取而变化的。设最大、最小增益分别为

$$M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$m = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

这个增益的变化可用 A 的奇异值来表示。对 A 进行奇异值分解, $A = U \Sigma V^T$, 并令 $Z = V^T x$, 得

$$\|Ax\| = \|U \Sigma V^T x\| = \|\Sigma Z\| \quad (28)$$

式中, $\Sigma = \text{diag}(\bar{\sigma}, \dots, \underline{\sigma})$, 于是可得

$$\underline{\sigma} \|Z\| \leq \|\Sigma Z\| \leq \bar{\sigma} \|Z\| \quad (29)$$

因为 V^T 是正交矩阵, 所以 $\|Z\| = \|x\|$ 。用 $\|x\|$ 除上式, 可得

$$\underline{\sigma} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \bar{\sigma} \quad (30)$$

即

$$\bar{\sigma} = M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (31)$$

$$\underline{\sigma} = m = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (32)$$

而 $\text{Cond}(A) = \bar{\sigma}/\underline{\sigma}$ 称为矩阵 A 的条件数。条件数越大, 矩阵 A 越接近奇异, 由 A 所表示的系统的增益变化范围也越大。

现在我们可以说, 要返差矩阵的逆阵 $(I + GK)^{-1}$ 小, 就意味着该矩阵的最大奇异值要小, 即 $\bar{\sigma}[(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}]$ 小。根据奇异值的几个性质可知, 这等价于要求 $\underline{\sigma}[I + GK]$ 大。因为

$$\underline{\sigma}(GK) - 1 \leq \underline{\sigma}[I + GK] \leq \underline{\sigma}(GK) + 1$$

只要 $\underline{\sigma}(GK)$ 大, 就有 $\underline{\sigma}[I + GK]$ 大。这与单变量系统中提高开环增益以减小误差的结论是相似的。由上可知, 对传递函数矩阵的要求可转化为对最大、最小奇异值的要求。当然, 当输入 x 仅在一个子集上变化时, 这种对最大、最小奇异值的要求可能是保守的。

2. 鲁棒稳定性⁽¹⁷⁾

反馈控制的优点是在系统参数有些变化时可比开环控制更满意地工作。但在参数有较大变化时, 反馈控制不一定都能保持稳定, 这就研究稳定的鲁棒性。当前研究的一个方向是找到一个条件, 在此条件下, 当系统开环传递函数矩阵 $G(S)$ 有一扰动量 $\Delta G(S)$ 时, 系统仍能保持稳定。这种条件可以用相应的传递函数矩阵的奇异值来表示。考虑图 4 所示扰动后的闭环系统, 并作结构变换。

图 4 (c) 中 $H(S)$ 是未扰动的闭环传递函数矩阵。当未扰动的系统是稳定的, 且扰动量 $\Delta G(S)$ 也是稳定时, 扰动后系统为稳定的条件是

$$\bar{\sigma}(H\Delta G) < 1 \quad \forall \omega \quad (33)$$

证明: 如果扰动后的系统不稳定, $\det(T'(j\omega))$ 就要包围复平面的原点, 这里 $T' = I + H\Delta G$ 是

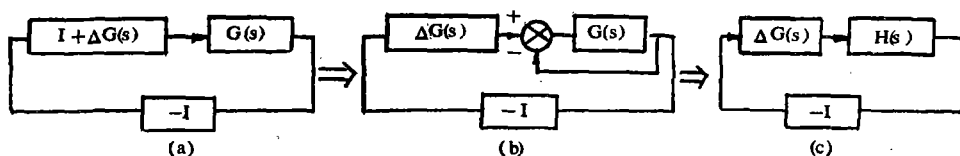


图 4

扰动后的返差阵。在临界稳定时有

$$\det[T'(j\omega)] = \det[I + H\Delta G] = 0$$

即 T' 奇异, $\underline{\sigma}[I + H\Delta G] = 0$ 。反过来说, 如果 $\underline{\sigma}[I + H\Delta G] > 0$, 则扰动后的系统仍保持稳定。但 $\underline{\sigma}[I + H\Delta G] \geq 1 - \overline{\sigma}[H\Delta G]$, 所以只要 $\overline{\sigma}[H\Delta G] < 1$, 扰动后系统仍稳定。上面对闭环传递函数矩阵的要求可转化为对开环传递函数矩阵的要求。利用奇异值不等式

$$\overline{\sigma}[H\Delta G] \leq \overline{\sigma}(H)\overline{\sigma}(\Delta G)$$

所以当 $\overline{\sigma}(H) < 1/\overline{\sigma}(\Delta G)$ 就有 $\overline{\sigma}[H\Delta G] < 1$, 但 $H = [I + (GK)^{-1}]^{-1}$, 这相当于要求 $\underline{\sigma}[I + (KG)^{-1}]^{-1} < 1/\overline{\sigma}(\Delta G)$, 或 $\underline{\sigma}[I + (GK)^{-1}] > \overline{\sigma}(\Delta G)$ 。进一步, 因为

$$\underline{\sigma}[I + (GK)^{-1}] \geq \underline{\sigma}[(GK)^{-1}] - 1$$

所以, 只要

$$\underline{\sigma}[(GK)^{-1}] - 1 > \overline{\sigma}(\Delta G)$$

或 $\underline{\sigma}[(GK)^{-1}] > 1 + \overline{\sigma}(\Delta G)$

即 $\overline{\sigma}[GK] < 1/[1 + \overline{\sigma}(\Delta G)]$

$$< 1/\overline{\sigma}(\Delta G)$$

所以, 当 $\overline{\sigma}[GK] < 1/\overline{\sigma}(\Delta G)$, 扰动后的系统仍稳定。

Doyle^[16] 给出一个例子, 说明用奇异值分解法可以很清楚地看出该系统缺乏鲁棒稳定性, 但用乃氏图或反乃氏图的方法却不能检测这种性质。

奇异值分解法在模型降阶^[18]及数字图象处理^[19]中也有应用, 这里就不详述了。

参 考 文 献

- (1) Klema, V.C. and Laub, A.J., The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Application, IEEE Trans., AC-25, No.2, April 1980.
- (2) MacDuffee, C.C., The Theory of Matrices, Berlin: Springer, 1933.
- (3) Autonne, L., Bull. Soc. Math. France, Vol 30, pp.121-133, 1902.
- (4) Ekart, C. and Young, G., A Principal Axis Transformation for non-Hermitian Matrices, Bull. Amer. Math. Soc., Vol.45, pp181-121, 1939.
- (5) Paige, C.C., Properties of Numerical Algorithms Related to Computing Controlability, IEEE Trans., AC-26, No.1, Feb., 1981.
- (6) Forsythe, G.E., Malcolm, M.A. and Moler, C.B., Computer Methods for Mathematical Computation, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.
- (7) Stewart, G.W., Introduction to Matrix Computations, New York: Academic, 1973.
- (8) Smith, B.T. et al., Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide, 2nd ed. (Lecture Notes in Comput. Sci.) Vol.6, New York: Springer-Verlag, 1976.
- (9) Garbow, B.S. et al., Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide Extension (Lect. Notes in Comput. Sci.), Vol.51, New York: Springer-Verlag, 1977.
- (10) Dongarra, J.J. et al., LINPACK User's Guide, Philadelphia, PA: SIAM, 1979.
- (11) Cruz, Jr., J.B. et al., A Relationship between Sensitivity and Stability of Multivariable Feedback Systems, IEEE Trans. AC-26, No.1, Feb., 1981.
- (12) Lehtomaki, N.A. Sandell, Jr., N.R. and Athans, M., Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian based Multivariable Control Designs, IEEE Trans, AC-26, No.1, Feb., 1981.
- (13) Lawson, C.L. and Hanson, R.J., Solving Least Squares Problems, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.
- (14) Zhang, H.Y. (张洪斌), Shieh, L.S., Yates, R. E., Identification and Model Reduction of Multivariable Continuous Systems via a Block-pulse Functions Scheme, Applied Mathematical Modelling, 1982, Vol.6, Oct., pp.369-372.
- (15) Zeiger, H.P. and McEwen, A.J., Approximate Linear Realizations of Given Dimension via Ho's Algorithm, IEEE Trans., AC-19, No.2, April, 1974.
- (16) Doyle, J.C. and Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans., AC-26, No.1, Feb., 1981.
- (17) Postlethwaite, L., Edmunds, J.M. and Macfarlane, A.G.J., Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of linear Multivariable Feedback Systems, IEEE Trans. AC-26, No.1, Feb., 1981.
- (18) Moore, B.C., Principal Component Analysis in Linear System: Controllability, Observability, and Model Reduction, IEEE Trans., AC-26, No.1, Feb., 1981.
- (19) Andrews, H.C. and Patterson, C.L., Outer Product Expansions and Their Uses in Digital Image Processing, American Math., Monthly, Vol.82, pp.1-12, 1975.

certain features.

The main function of the algorithm is to plot the region contour on the x-y plotter and display certain parameters, such as perimeter and area, quickly. (p.21)

An Automatic Dispatching System for Railroad Trains

Zhang Xidi et al.

This paper describes the features, basic requirements, system components, reliability, and adaptability of the railway train dispatching system.

This is a computerized monitoring system, now under test run in China. (p.27)

Program a General Ledger for Accounting

Liu Guiyin

The programming system described in this paper is suitable for bookkeeping at mines, factories, commercial and communication departments and different other enterprises. It meets the diversified requirements of that broad spectrum of users. At the same time, it is a multi-user's system, and easy to realize on various types of computers in different kinds of languages (p.32)

The Singular Value Decomposition and its Application in Identification and Control

Zhang Hongyue

Singular value decomposition (SVD) is an important topic in numerical computation. It has gained wide application in control field.

And it is illustrated in this paper that the floating point arithmetic of the machine affects the accuracy of the calculation to an extent which largely depends upon the problem itself and the stability of the computing method used.

Finally, the SVD theorem and some basic properties of the singular value and singular vector are introduced. And some of its application in system control and identification are given. (p.36)

Muscular Current Telemetry System for Athletes

Yan Shiming et al.

This paper introduces the design and application of muscular current telemetry system for athletes (MCTSA), in which PAM-FM has been used. Picking up the currents from 8 to 12 muscles and one of joint angles, the system can monitor the physical conditions of an athlete who is at a distance of 100M away. Being able to perform real-time monitoring and recording, the instrument is quite useful for athletic physiological and biomechanic study. Besides, it can be used as an industrial or medical instrument in the measurement of 8 to 12 signals of several to 500 Hz.

The device is portable and has a low power consumption. (p.46)