第 29 卷第 5 期
2000 年 10 月
信 息 与 控 制
Information and Control
Vol. 29, No. 5
Oct. , 2000

文章编号: 1002-0411(2000)05-0471-05

一类滞后型控制系统的鲁棒绝对稳定性

杨　斌　陈绵云
(华中理工大学控制科学与工程系　武汉　430074)

摘　要: 利用 Lyapunov 泛函以及区间矩阵的分析方法, 讨论了一类滞后型控制系统的鲁棒绝对稳定性问题, 给出了系统鲁棒绝对稳定的一些实用的代数判据. *

关键词: 控制系统, 区间矩阵, 鲁棒绝对稳定
中图分类号: TP13　　　　文献标识码: B

1　引言

稳定性问题是自动控制系统设计中的一个基本问题, 对控制系统有极其重要的理论意义和实际应用价值. 从 50 年代至今国内外对非线性控制系统的绝对稳定性理论研究, 已获得了丰硕的成果[1~4]. 由于在实际应用中任何闭环控制系统都存在滞后效应, 因此研究这类系统的稳定性, 就会显得更加重要. 由于滞后型的控制系统是定义在函数空间上, 因此对这类问题的研究变得更加复杂和困难[5]. 近年来, 关于区间动力系统的稳定性研究引起了国内外学者的广泛兴趣, 但到目前为止对非线性区间动力系统稳定性的讨论还不多见. 文[6, 7]讨论了 Lurie 型区间控制系统的鲁棒绝对稳定性问题, 并给出了保证系统绝对稳定的充分条件. 本文中我们将在文[6, 7]的基础上讨论更具一般性的滞后型控制系统的鲁棒绝对稳定性问题, 运用构造 Lyapunov 泛函的方法以及区间矩阵的分析方法, 给出了保证系统鲁棒绝对稳定的充分条件.

本文研究滞后型的间接控制系统

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = [D, E]x(t) + [G, H]x(t-\tau) + [L, M]f(\sigma) \\ \mathring{\sigma} = c^{\mathrm{T}}x(t) - \rho f(\sigma), \quad f(\sigma) \in F[0, \infty) \end{cases} \tag{1}$$

和直接控制系统

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = [D, E]x(t) + [G, H]x(t-\tau) + [L, M]f(\sigma) \\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x(t), \quad f(\sigma) \in F[0, \infty) \end{cases} \tag{2}$$

的鲁棒绝对稳定性. 这里 $x(t) \in R^n$; $D, E, G, H \in R^{n\times n}$; $c \in R^n$, $[D, E]$, $[G, H]$为 $n\times n$ 阶区间矩阵; $L, M \in R^n$; $[L, M]$为 $n\times 1$ 阶区间矩阵, $\tau \geqslant 0$ 为常数.

$$F[0, \infty) = \{ f(\sigma) \mid f(0) = 0, \quad 0 < \sigma f(\sigma) < \infty, \sigma \neq 0 \}.$$

同时考虑辅助系统

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma) \\ \mathring{\sigma} = c^{\mathrm{T}}x(t) - \rho f(\sigma), \quad f(\sigma) \in F[0, \infty) \end{cases} \tag{3}$$

与系统

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma) \\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x(t), \quad f(\sigma) \in F[0, \infty) \end{cases} \tag{4}$$

* 收稿日期: 1999-07-14

其中 $A\in[D,E]$, $B\in[G,H]$, $b\in[L,M]$.

定义 若对任意 $A\in[D,E]$, $B\in[G,H]$, $b\in[L,M]$, $f(\sigma)\in F[0,\infty)$ 以及 $\tau\geqslant 0$, 系统(3), (4)的零解是全局渐近稳定的, 则称系统(1), (2)鲁棒绝对稳定.

在本文中约定: 对于任意矩阵 $D=(d_{ij})_{m\times n}$, 矩阵 $|D|=(|d_{ij}|)_{m\times n}$. $\lambda_M(D)$ 与 $\lambda_M(D)$ 分别表示矩阵 D 的最大与最小特征值. 设 I 与 J 分别为集合$\{1,2,\cdots,n\}$的子集, 并且满足条件: (i) $I\cup J=\{1,2,\cdots,n\}$ (ii) $I\cap J=\Phi$.

对于矩阵 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n}$定义它的子矩阵为

$$\overline{A}_{IJ}=\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_{n-s}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_s,j_1} & \cdots & a_{i_s,j_{n-s}} \end{vmatrix}$$

这里 I 与 J 满足条件(i), (ii)并且 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}$, $J=\{j_1,j_2,\cdots,j_{n-s}\}$.

引理 1[8] 假设 B,C 为 $n\times n$ 阶实对称矩阵, 则区间矩阵$[B,C]$是 Hurwitz 稳定的充要条件为矩阵

$$\Phi_{IJ}=\begin{vmatrix} C_{II} & B_{IJ} \\ B_{JI} & C_{JJ} \end{vmatrix}$$

负定, 其中 I 与 J 满足条件(i), (ii); $C_{II}, C_{JJ}, B_{IJ}, B_{JI}$分别为矩阵的 C, B 的子矩阵.

2 滞后型间接控制系统的鲁棒绝对稳定性

对系统(3)作如下假设

$$A_0=\frac{1}{2}(D+E),\quad \Delta A=A-A_0,\quad B_0=\frac{1}{2}(G+H),\quad \Delta B=B-B_0$$

$b_0=\frac{1}{2}(L+M)$, $\Delta b=b-b_0$, 记 $K=\frac{1}{2}(E-D)$, $S=\frac{1}{2}(H-G)$, $T=\frac{1}{2}(M-L)$

则系统(3)可改写为

$$\left|\begin{aligned} &\mathring{x}(t)=(A_0+\Delta A)x(t)+(B_0+\Delta B)x(t-\tau)+(b_0+\Delta b)f(\sigma) \\ &\mathring{\sigma}=c^{\mathrm{T}}x(t)-\rho f(\sigma),\quad f(\sigma)\in F[0,\infty) \end{aligned}\right. \tag{5}$$

假设 A_0 稳定, 故对任意正定矩阵 W, 必存在正定矩阵 P 满足 Lyapunov 方程

$$A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-W \tag{6}$$

取系统(5)的 Lyapunov 泛函为

$$V(\varphi,t)=\varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0)+\alpha\int_{-\tau}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta+\beta\int_{0}^{c^{\mathrm{T}}\varphi(0)}f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

计算可得

$$\mathring{V}(\varphi,t)|_{(5)}=-\xi^{\mathrm{T}}\overline{W}\xi+|\xi|^{\mathrm{T}}\widetilde{W}|\xi|$$

其中 $\xi^{\mathrm{T}}=[x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-\tau),f(\sigma)]^{\mathrm{T}}$, $u_1=-PB_0$, $u_2=-Pb_0-\frac{1}{2}\beta c$,

$$\hat{W}=|K|^{\mathrm{T}}|P|+|P||K|,\quad \widetilde{u}_1=|P||S|,\quad \widetilde{u}_2=|P||T|,$$

$$\overline{W}=\begin{vmatrix} W-\alpha I_1 & u_1 & u_2 \\ u_1^{\mathrm{T}} & \alpha I_2 & 0 \\ u_2^{\mathrm{T}} & 0 & \beta\rho \end{vmatrix},\quad \widetilde{W}=\begin{vmatrix} \hat{W} & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ \widetilde{u}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \widetilde{u}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

其中 I_1 与 I_2 为具有适当维数的单位矩阵. 又因为 $\widetilde{W}$ 为实对称矩阵, 则有

$$|\xi|^{\mathrm{T}}\widetilde{W}|\xi| \leqslant \lambda_M(\widetilde{W})\xi^{\mathrm{T}}\xi$$

于是有

$$\mathring{V}(\varphi,t)\big|_{(5)} \leqslant -\xi^{\mathrm{T}}\begin{vmatrix} W-(\alpha+\lambda_M)I_1 & u_1 & u_2 \\ u_1^{\mathrm{T}} & (\alpha-\lambda_M)I_2 & 0 \\ u_2^{\mathrm{T}} & 0 & \beta\rho-\lambda_M \end{vmatrix}\xi = -\xi^{\mathrm{T}}Q_1\xi$$

若矩阵 Q_1 正定, 则存在正数 η, 使得

$$\mathring{V}(\varphi,t)\big|_{(5)} \leqslant -\eta\| x(t)\|^2$$

又因为 Lyapunov 泛函(7) 满足 Burton 定理[1]的全部条件, 所以系统(5) 的零解是全局渐近稳定的. 于是可得如下的定理.

定理 2.1　若矩阵 Q_1 正定, 则系统(1) 鲁棒绝对稳定.

　　下面用区间矩阵的方法给出系统(1) 鲁棒绝对稳定的另一个结果.

计算可得

$$\mathring{V}(\varphi,t)\big|_{(5)} \subset \xi^{\mathrm{T}}[\underline{Q},\overline{Q}]\xi$$

其中$\underline{Q}=-\overline{W}-\widetilde{W}$, $\overline{Q}=-\overline{W}+\widetilde{W}$; $\overline{W}$, $\widetilde{W}$ 的含义同上.

利用引理 1, 类似于定理 2.1 的证明, 我们可得如下的定理.

定理 2.2　如果矩阵

$$\varphi_{IJ} = \begin{vmatrix} \overline{Q}_{II} & \underline{Q}_{IJ} \\ \underline{Q}_{JI} & \overline{Q}_{JJ} \end{vmatrix}$$

负定, 则系统(1) 鲁棒绝对稳定. 其中 I 与 J 满足条件(i), (ii) $\overline{Q}_{II}$, $\overline{Q}_{JJ}$, $\underline{Q}_{IJ}$, $\underline{Q}_{JI}$ 分别为矩阵的 $\overline{Q}$, $\underline{Q}$的子矩阵.

3　滞后型直接控制系统的鲁棒绝对稳定性

　　对于直接系统(4) 作与第 2 部分的相同假设, 则系统(4) 可写为

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = (A_0+\Delta A)x(t) + (B_0+\Delta B)x(t-\tau) + (b_0+\Delta b)f(\sigma) \\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x(t), \quad f(\sigma)\in F[0,\infty) \end{cases} \tag{8}$$

取系统(8) 的 Lyapunov 泛函为

$$V(\varphi,t) = \varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0) + \alpha\int_{-\tau}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \beta\int_{0}^{c^{\mathrm{T}}\varphi(0)}f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \tag{9}$$

式中正定矩阵 P 满足 Lyapunov 方程(6). 计算可得

$$\mathring{V}(\varphi,t)\big|_{(8)} \leqslant -\xi^{\mathrm{T}}\overline{W}\xi + |\xi|^{\mathrm{T}}\widetilde{W}|\xi| - \mu\sigma f(\sigma)$$

其中　$\xi^{\mathrm{T}} = [x^{\mathrm{T}}(t), x^{\mathrm{T}}(t-\tau), f(\sigma)]^{\mathrm{T}}$, $u_1 = -PB_0$, $u_2 = -Pb_0 - \frac{1}{2}\beta A_0^{\mathrm{T}}c - \frac{1}{2}\mu c$,

$u_3 = -\frac{1}{2}\beta B_0^{\mathrm{T}}c$, $\hat{W} = |K|^{\mathrm{T}}|P| + |P||K|$, $\widetilde{u}_1 = |P||S|$, $\widetilde{u}_2 = |P||T| + \frac{1}{2}\beta|K||c|$,

$\widetilde{u}_3 = \frac{1}{2}\beta|S|^{\mathrm{T}}|c|$, $\widetilde{u}_4 = \beta|c|^{\mathrm{T}}|T|$, $\overline{W} = \begin{vmatrix} W-\alpha I_1 & u_1 & u_2 \\ u_1^{\mathrm{T}} & \alpha I_2 & u_3 \\ u_2^{\mathrm{T}} & u_3^{\mathrm{T}} & -\beta c^{\mathrm{T}}b_0 \end{vmatrix}$, $\widetilde{W} = \begin{vmatrix} \hat{W} & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ \widetilde{u}_1^{\mathrm{T}} & 0 & \widetilde{u}_3 \\ \widetilde{u}_2^{\mathrm{T}} & \widetilde{u}_4^{\mathrm{T}} & \widetilde{u}_4 \end{vmatrix}$.

又因为 $\widetilde{W}$ 为实对称矩阵, 则有

$$|\xi|^{T}\widetilde{W}|\xi| \leqslant \lambda_M(\widetilde{W})\xi^{T}\xi$$

于是有

$$\overset{\circ}{V}(\varphi,t)\Big|_{(8)} \leqslant -\xi^{T}\begin{bmatrix} W-(\alpha+\lambda_M)I_1 & u_1 & u_2 \\ u_1^{T} & (\alpha-\lambda_M)I_2 & u_3 \\ u_2^{T} & u_3^{T} & \beta c^{T}b_0-\lambda_M \end{bmatrix}\xi = -\xi^{T}Q_2\xi$$

若矩阵 Q_2 正定, 则存在正数 η, 使得

$$\overset{\circ}{V}(\varphi,t)\Big|_{(5)} \leqslant -\eta\|x(t)\|^{2}$$

又因为 Lyapunov 泛函(9)满足 Burton 定理[1]的全部条件, 所以系统(8)的零解是全局渐近稳定的. 于是可得如下的定理.

定理 **3.1** 若矩阵 Q_2 正定, 则系统(2)鲁棒绝对稳定.

同样用区间矩阵的方法给出系统(2)鲁棒绝对稳定的另一个结果. 计算可得

$$\overset{\circ}{V}(\varphi,t)\Big|_{(8)} \subset \xi^{T}[\underline{Q},\overline{Q}]\xi-\mu\sigma f(\sigma)$$

其中$\underline{Q}=-\overline{W}-\widetilde{W}$, $\overline{Q}=-\overline{W}+\widetilde{W}$; $\overline{W},\widetilde{W}$ 的含义同前.

同样利用引理 1, 类似于定理 3.1 的证明, 可得如下的定理.

定理 **3.2** 如果矩阵

$$\varphi_{IJ}=\begin{bmatrix} \overline{Q}_{II} & \underline{Q}_{IJ} \\ \underline{Q}_{JI} & \overline{Q}_{JJ} \end{bmatrix}$$

负定, 则系统(1)鲁棒绝对稳定. 其中 I 与 J 满足条件(i), (ii) $\overline{Q}_{II},\overline{Q}_{JJ},\underline{Q}_{IJ},\underline{Q}_{JI}$分别为矩阵的$\overline{Q}$ $\underline{Q}$的子矩阵.

4 应用实例

例 **4.1** 考虑直接控制系统

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+bf(\sigma) \\ \sigma=c^{T}x(t), \quad f(\sigma)\in F[0,\infty) \end{cases}$$

其中 $A=\begin{bmatrix} [-2.1,-1.9] & [-1.15,-0.85] \\ [0.9,1.1] & [-3.2,-2.8] \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} [-1.2,-0.8] &]-0.1,0.1] \\ [-01,0.1] & [0.7,1.3] \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} [-2.95,-3.05] \\ [-1.1,-0.9] \end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 取 $P=I$, $\alpha=2.1$, $\beta=\mu=2$, 计算可得

$$Q_2=\begin{bmatrix} 1.03 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.03 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1.23 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1.23 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5.13 \end{bmatrix}$$

由于 $\lambda_M(Q_2)=0.03>0$, 故矩阵 Q_2 正定, 故由定理 3.1 可知直接控制系统鲁棒绝对稳定.

5 结论

本文用 Lyapunov 泛函法以及区间矩阵的分析方法研究了一类滞后型控制系统的鲁棒绝对稳定性问题, 给出了保证系统鲁棒绝对稳定的判别条件.

参　考　文　献

1　Burton T A. Volterra Integral and Differential Equation, Academic Press, New York, 1983

2　赵素霞. 非线性控制系统绝对稳定性理论的新进展. 见: 常微分方程理论及应用(王联等编), 科学出版社, 1992: 27~ 29

3　赵素霞. 多个执行机构的控制系统的绝对稳定性. 中国科学 A 辑, 1987: 785~ 792

4　Wu Yongxian and Zhao Suxia. Absolute Stability of Control Systems with Several Nonlinear Stationary Elements in the Case of an Infinite Sector. Automatika Telemekh, 1991, **52**(1): 34~ 42

5　王　联, 张　毅, 章　毅. 一类滞后型控制系统的绝对稳定性. 科学通报, 1993, **8**(16): 1445~ 1448

6　年晓红. Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性. 控制理论与应用, 1995, **12**(5): 641~ 645

7　杨　斌. 关于 Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性. 自动化学报, 1998, **24**(6): 816~ 819

8　Kainig Wang and Anthony N Michel. On Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices. System &Control Letters, . 1993, **20**: 345~ 351

9　李森林, 温立志. 泛函微分方程. 湖南科学技术出版社, 1987

10　谢惠民, 绝对稳定性理论与应用. 科学出版社, 1986

ROBUST STABILITY FOR A CLASS OF CONROL SYSTEMS WITH TIME-DELAY

YANG Bin　CHEN Mian-yun

(*Dept. of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan* 430074)

Abstract: In this paper, Lyapunov function and interval matrix analysis method are used to study the Robust stability of a class of control system with time-delay, sufficient conditions for the Robust stability of the systems are given.

Keywords: control system, interval matrix, robust stability

作者简介

杨　斌, 男, 30 岁, 博士后. 研究领域为系统的稳定性分析与控制.

陈绵云, 男, 62 岁, 教授, 博士生导师. 研究领域为一般系统理论及应用.

(上接第 440 页)

ROBUST CONTROL DESING FOR A CLASS OF DELAY TIME UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS

ZHU Jun[1]　LI Yang-sheng[2]　WANG Yin-he[2]　ZHANG Si-ying[2]

(1. *Shenyang Institute of Automation, Chinese Acadamy of Sciences, Shenyang* 110015;

2. *Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract: A kind of controller is designed by exact feedback linearization and Lyapunov method for a class of single input uncertain time- delay systems. The steps described in this paper very easily verify this algorithm. An example is given at the end of the paper to illustrate the availability of this method.

Keywords: time delay, nonlinearity, uncertainty, robust uniformly ultimately bounded (UUB)

作者简介

朱　军(1964-), 硕士, 副研究员. 研究领域为复杂系统工程.

黎阳生(1959-), 硕士, 副教授. 研究领域为复杂系统的结构研究及鲁棒控制.

王银河(1962-), 博士生. 研究领域为复杂系统的结构研究, 鲁棒控制及自适应控制.