

# 多变量系统的结构辨识及其在电加热炉上的应用\*

杨卫东 舒迪前 刘宏才

(北京钢铁学院)

【提要】 本文在 Guidorzi 结构辨识方法的基础上，通过引入向量系的标准化、相关性指标和相对相关性指标等概念，对有噪声情况下多变量系统结构辨识提出一种判别准则。采用此准则对电加热炉系统的模型结构进行了辨识，并进行了相应的参数估计。计算结果表明：此判别准则较 Guidorzi 和文献[2] 所给出的方法，易于确定有噪声情况下模型的结构参数，且基本不受数据数量级及长度  $N$  的影响。

在最近二十多年里，系统辨识已经构成了自动控制理论的核心学科之一，而多变量系统辨识则是当前系统辨识领域的一个主要方向。

在多变量系统辨识中，结构的辨识占有十分重要的地位，且是至今尚未完全解决的问题。

本文的目的是试图在 Guidorzi 结构辨识方法的基础上，通过引入向量系的标准化、相关性指标和相对相关性指标等概念，对有噪声情况下多变量系统的结构辨识进行一些探讨，并就其在电加热炉系统中的应用给出一个实际的例子。

## 一 问题的描述及 Guidorzi 方法简介

考虑  $r$  个输入、 $m$  个输出的多变量线性系统。在可观条件下，同一系统的任何最小实现都等价于下述 Luenberger 状态空间规范形：

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k) \\ Y(k) = CX(k) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中矩阵  $A$ 、 $C$  具有下述规范形式：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{v_i-1} & \\ 0 & & & \\ a_{i,i,1} & a_{i,i,2} & \dots & a_{i,i,v_i} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{i,j,1} & a_{i,j,2} & \dots & a_{i,j,v_j} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

↑            ↑            ↑             $\left(\sum_{i=1}^{m-1} v_i\right) + 1$   
1         $v_1 + 1$

上述 Luenberger 规范形在输入-输出特性上完全等价于如下的输入-输出差分方程：

$$P(z)y(k) = Q(z)u(k) \quad (1.6)$$

其中：

$$P(z) = \begin{pmatrix} P_{11}(z) & \dots & P_{1m}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m1}(z) & \dots & P_{mm}(z) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$Q(z) = \begin{pmatrix} q_{11}(z) & \dots & q_{1r}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1}(z) & \dots & q_{mr}(z) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$\text{而 } P_{ii}(z) = z^{v_i} - a_{i,i,v_i} z^{v_i-1} - \dots - a_{i,i,1} z - a_{i,i,0} \quad (1.9)$$

$$P_{ij}(z) = -a_{i,j,v_j} z^{v_j-1} - \dots - a_{i,j,1} z - a_{i,j,0} \quad (1.10)$$

$$q_{ij}(z) = \beta(v_1 + \dots + v_j) z^{v_j-1} + \dots + \beta(v_1 + \dots + v_{j-1} + 2) z + \beta(v_1 + \dots + v_{j-1} + 1) \quad (1.11)$$

\* 收到本文的时间是1982年6月21日。

这里,  $v_1, v_2, \dots, v_m$  就称为系统(1.1)或(1.6)的结构指标, 并满足关系式:

$$\sum_{i=1}^m v_i = n \quad (1.12)$$

$n$  是系统(1.1)的阶, 且有:

$$\begin{cases} v_{i,j} \leq v_i + 1 & j < i \\ v_{i,j} \leq v_i & j \geq i \end{cases} \quad (1.13)$$

结构指标  $v_1, v_2, \dots, v_m$  实际上就是线性系统(1.1)的一组克罗尼克不变量, 而结构辨识就是确定这组结构指标。

Guidorzi 在 1975 年首先提出了一个利用输入输出数据直接确定结构指标  $v_1, \dots, v_m$  的方法<sup>[1]</sup>, 并引起了国内外的普遍重视。对此简述如下。

将原系统(1.6)分解为  $m$  个子系统, 每个子系统相应于  $P(z), Q(z)$  的一行。对第  $S$  个子系统, 有:

$$\sum_{i=1}^m P_{S_i}(z)y_i(k) = \sum_{i=1}^r q_{S_i}(z)u_i(k) \quad (1.14)$$

考虑到(1.9)、(1.10)、(1.11)式, 式(1.14)可以写为:

$$\begin{aligned} y_S(k+v_S) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{v_{S_i}} a_{S_i,j} y_i(k+j-1) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v_S} \beta_{i,j} (v_1 + \dots + v_{S-1} + j), i \\ &u_i(k+j-1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中:  $v_{SS} = v_S$ 。

考虑由输入输出量测数据构造的矩阵:

$$\begin{pmatrix} y_1(k) & y_1(k+1) & \dots & \dots \\ y_1(k+1) & y_1(k+2) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ y_1(k+N) & y_1(k+N+1) & \dots & \dots \\ y_m(k) & y_m(k+1) & \dots & \dots \\ y_m(k+1) & y_m(k+2) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ y_m(k+N) & y_m(k+N+1) & \dots & \dots \\ u_1(k) & u_1(k+1) & \dots & \dots \\ u_1(k+1) & u_1(k+2) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ u_1(k+N) & u_1(k+N+1) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_r(k) & u_r(k+1) & \dots \\ u_r(k+1) & u_r(k+2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_r(k+N) & u_r(k+N+1) & \dots \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) & \bar{y}_1(k+1) & \dots & \bar{y}_m(k) & \bar{y}_m(k+1) & \dots \\ \bar{u}_1(k) & \bar{u}_1(k+1) & \dots & \bar{u}_r(k) & \bar{u}_r(k+1) & \dots \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

于是, (1.15) 式意味着, 向量

$$\bar{y}_S(k+v_S) = \begin{pmatrix} y_S(k+v_S) \\ y_S(k+v_S+1) \\ \vdots \\ y_S(k+v_S+N) \end{pmatrix}$$

是向量组

$$\begin{aligned} &\bar{y}_1(k+v_S), \dots, \bar{y}_S(k+v_S-1), \dots, \\ &\bar{y}_m(k+v_S-1), \dots, \bar{y}_1(k), \dots, \bar{y}_m(k), \\ &\bar{u}_1(k+v_S-1), \dots, \bar{u}_r(k+v_S-1), \\ &\dots, \bar{u}_1(k), \dots, \bar{u}_r(k) \end{aligned}$$

的线性组合。利用这个关系, 按如下顺序选择向量:

$$\begin{aligned} &\bar{y}_1(k), \bar{y}_2(k), \dots, \bar{y}_m(k), \bar{u}_1(k), \bar{u}_2(k), \dots, \\ &\bar{u}_r(k), \bar{y}_1(k+1), \bar{y}_2(k+1), \dots, \bar{y}_m(k+1), \\ &\bar{u}_1(k+1), \bar{u}_2(k+1), \dots, \bar{u}_r(k+1), \\ &\bar{y}_1(k+2), \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

当找到某向量  $\bar{y}_S(k+v_S)$  与前面所选出的向量线性相关时, 就得到了一个结构指标  $v_S$ 。当每个输出子矩阵中都找到这样的向量时, 选择结束, 从而得到了  $v_1, v_2, \dots, v_m$ 。于是, 系统结构指标的确定, 就变成了一个向量组线性相关性的判定问题。

为判定向量组的线性相关性, 引入记号  $R(\delta_1, \dots, \delta_{m+r})$ , 它表示从式(1.16)第  $i$  个子矩阵中取其前  $\delta_i$  ( $i=1, 2, \dots, m+r$ ) 个列向量所构成的矩阵, 即:

$$\begin{aligned} R(\delta_1, \dots, \delta_{m+r}) &= \begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) & \dots & \bar{y}_1(k+\delta_1-1) \\ \dots & \bar{y}_m(k) & \dots & \bar{y}_m(k+\delta_m-1) \\ \bar{u}_1(k) & \dots & \bar{u}_1(k+\delta_{m+1}-1) & \dots & \bar{u}_r(k) \\ \dots & \bar{u}_1(k+\delta_{m+r}-1) & \dots & \bar{u}_r(k) & \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

有时将  $R(\delta_1, \dots, \delta_{m+r})$  简记为  $R$ 。

由于要占用大量的存储区域, 因此直接构

造矩阵  $R$  并据此来判断其列向量的线性相关性是不合理也是不方便的。利用性质：对任何实矩阵  $D$ ,  $\text{rank}(D) = \text{rank}(D^T D)$  有下述简便算法。我们首先定义矩阵：

$$S(\delta_1, \dots, \delta_{m+r}) = R^T(\delta_1, \dots, \delta_{m+r}) \\ R(\delta_1, \dots, \delta_{m+r}) \quad (1.19)$$

Guidorzi 的方法是依次考查下述矩阵：

$$S(2, 1, \dots, 1), S(2, 2, 1, \dots, 1) \dots, S(2, \\ \dots, 2), \dots \quad (1.20)$$

当发现  $S(\delta_1, \dots, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_{m+r})$  非奇异，而  $S(\delta_1, \dots, \delta_i + 1, \delta_{i+1}, \dots, \delta_{m+r})$  ( $i \leq m$ ) 奇异时，则必有  $v_i = \delta_i$ ；一直作下去，就可找到全部结构指标  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ )。在此基础上可进一步利用最小二乘等方法进行参数估计。

显然，上述 Guidorzi 结构辨识方法是通过判断矩阵  $S$  的奇异性来考察向量组的线性相关性，进而确定结构指标的。至于矩阵  $S$  的奇异性判定，Guidorzi 只在数值例子中隐含说明了是以  $S$  的最小特征值  $\lambda_{\min}$  是否等于或接近于零作为判断准则的。这是因为，根据矩阵  $S = R^T R$  的非负定性，当  $S$  奇异（即  $\det S = 0$ ，从而向量组线性相关）时，必有  $\lambda_{\min} = 0$ ；而若  $S$  非奇异（从而向量组线性独立），则必有  $\lambda_{\min} > 0$ 。

判断矩阵  $S$  是否奇异的另一个方法是考察是否有  $\det S = 0$ 。王秀峰、卢桂章据此提出了一个结构辨识的递推算法<sup>[2]</sup>。由于在 Guidorzi 结构辨识方法中要考察一系列矩阵的奇异性，因此为避免直接逐次求  $\det S$  而造成计算量过大，[2] 给出了一套递推公式，使得在已知  $\det S_i$  的情况下，只要经过一些矩阵或向量的乘法运算，就可以求得  $\det S_{i+1}$ ，即：

$$\det S_{i+1} = \det S_i \cdot \det [\bar{y}_{j, \mu_j}^T (I - \\ R_i S_i^{-1} R_i^T) \bar{y}_{j, \mu_j}] \quad (1.21)$$

式中各量意义详见文献[2]。注意到，由于  $\bar{y}_{j, \mu_j}$  是列向量，因此 (1.21) 式可以写成：

$$\det S_{i+1} = \det S_i \cdot P \quad (1.22)$$

其中， $P = \det [\bar{y}_{j, \mu_j}^T (I - R_i S_i^{-1} R_i^T) \bar{y}_{j, \mu_j}] \\ = \bar{y}_{j, \mu_j}^T (I - R_i S_i^{-1} R_i^T) \bar{y}_{j, \mu_j}$  (1.23)

显然  $P$  是一个标量，它是两个行列式之比。

不难看出，如果  $\det S_i \neq 0$ ，而  $\det S_{i+1} = 0$ ，则必有  $P = 0$ 。因此这时  $\det S_{i+1} = 0$ （即矩阵  $S$  奇异及相应向量组线性相关）和  $P = 0$  是等价的。依据这一事实，在 [2] 所给方法中，实际作为矩阵奇异性判断准则的是  $P$  而不是  $\det S_{i+1}$ 。考虑到数值计算中的误差， $P$  一般不会精确为零，因此可以给定一个正小数  $\varepsilon (10^{-3} - 10^{-6})$ ，当  $P \leq \varepsilon$  时，则认为相应的矩阵  $S_{i+1}$  发生了奇异。

综上所述，我们看到：Guidorzi 的结构辨识方法（包括王-卢递推算法），是建立在古典线性相关理论基础之上的。正如 [1]、[2] 中的数值例子所显示的：对于无噪声数据，它们都可以给出结构指标的明确信息。但是，任何量测数据都是含有噪声的。为此，Guidorzi 将上述方法进行了推广。但从 [1] 中相应的实例可以看到，这时结构指标的信息已经不很明确了，而在相当的程度上依赖于人的主观判断。

将上述结构辨识方法应用于双输入-双输出的力学持久机电加热炉系统，计算结果表明：[1]、[2] 给出的判断矩阵  $S$  奇异性的方法，不能很好地适应更为普遍的有噪声情况，以至不可能在其本来意义下加以使用，从而使实际计算结果和上述理论方法之间存在相当大的差距。为此，我们认为：将建立在古典线性相关理论之上的 Guidorzi 结构辨识方法应用于含有噪声的实际数据时，有必要对其基本概念加以引伸，并引入新的判断向量组线性相关性的指标。

## 二 相关性及相对相关性指标的引入<sup>[3]</sup>

**定义 1** 行列式  $\det ((a_i, a_j))$  称为向量系  $a_1, \dots, a_N$  的 Gram 行列式，记作

$$G(a_1, \dots, a_N)$$

这里  $((a_i, a_j))$  表示以  $(a_i, a_j)$  为第  $(i, j)$  元的方阵，而  $(a_i, a_j)$  表示向量  $a_i$  和  $a_j$  的内积，即：

$$(a_i, a_j) = a_i^T a_j$$

且有： $(a_i, a_i) = (a_i, a_i)$

**定理** 向量系  $a_1, \dots, a_N$  线性相关的充分必要条件是Gram行列式

$$G[a_1, \dots, a_N] = 0$$

(证略, 参见[3])

显然, 在Guidorzi方法中, 矩阵S的行列式就是输入输出量测向量  $\bar{y}_1(k), \bar{y}_1(k+1), \dots, \bar{y}_m(k), \dots, \bar{u}_1(k), \dots, \bar{u}_1(k+1), \dots, \bar{u}_r(k), \dots$  所组成的向量系(组)的Gram行列式。

正如前述, 在实际情况下, 量测向量组的Gram行列式等于0(即  $\det S = 0$ ) 几乎是不可能的。这意味着, 将根据上述古典线性相关概念导出的Guidorzi结构辨识方法应用于实际的有噪声数据时, 必须突破古典线性相关概念的束缚。换句话说, 当考察一组向量的线性相关性时, 不以其Gram行列式是否为0来作为线性相关或独立的绝对界限, 而引入一相关性指标, 来衡量向量系的线性相关程度。这样就把Guidorzi方法中对于矩阵S的奇异性判定转为采用相关性指标来对向量系的线性相关程度进行度量。如果作为一个实际系统模型的理想线性定常系统在无噪声量测下, 其相应于某向量系的Gram行列式等于0, 那么对于这个真实系统且量测有噪声的情况来说, 相应的向量系的线性相关程度亦应比较强。这是基本的想法。

向量系的Gram行列式的值的大小, 可以反映该向量系的相关性或独立性程度。而为了用Gram行列式的值来衡量向量系  $a_1, \dots, a_N$  的线性相关性或独立性程度, 首先需要把向量系标准化。为此, 我们假定向量  $a_1, \dots, a_N$  的最大长度为1, 即:

$$\max_i \|a_i\| = 1$$

$\|\cdot\|$  表示向量“ $\cdot$ ”的欧几里得范数, 否则, 可用  $\max_i \|a_i\|$  除各向量。这时, Gram行列式的值恒在0与1之间, 即:

$$0 \leq G[a_1, a_2, \dots, a_N] \leq 1 \quad (2.1)$$

下面所提到的向量系(组)如不加以说明, 都指经过标准化的向量系。

**定义2** 若  $G[a_1, \dots, a_N] \leq \varepsilon$ , 则称向量

系  $a_1, \dots, a_N$  为  $\varepsilon$ -线性相关。这里  $\varepsilon$  是一正小数;

若  $G[a_1, \dots, a_N] \geq \delta$ , 则称向量系  $a_1, \dots, a_N$  为  $\delta$ -线性独立。这里  $\delta$  为小于等于1的正数。

数  $\varepsilon$  愈小, 向量系的相关性程度愈强;  $\delta$  愈大, 向量系的独立性亦愈强。因此, 可根据此二不等式来判断向量系的相关性或独立性程度。称不等式中的  $\varepsilon$ 、 $\delta$  为向量系的相关性或独立性指标。

采用相关性指标进行系统的结构辨识, 存在着对结构指标分辨较差的缺点。这是因为: 与序列(1.20)中某几个相邻矩阵相对应的那几个向量组的相关程度有时是很接近的。换句话说, 如果依据古典线性相关理论所要寻找的是使向量系从线性独立到线性相关这样一个转化点, 那么现在则是相应地要寻找一个使向量系的相关程度有显著增强的突跳点。为此, 要考虑向量  $a_{N+1}$  对于向量系  $a_1, \dots, a_N$  的相对相关性。

设  $\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i$  为向量  $a_{N+1}$  在  $a_1, \dots, a_N$  所张线性子空间中的最佳逼近向量, 并令:

$$h = a_{N+1} - \sum_{i=1}^N \alpha_i a_i \quad (2.2)$$

则有:

$$\|h\|^2 = \min_{\alpha_i} \|a_{N+1} - \sum_{i=1}^N \alpha_i a_i\|^2 \quad (2.3)$$

**定义3** 最佳逼近值  $\|h\|$  的平方是向量  $a_{N+1}$  关于向量系  $a_1, \dots, a_N$  的相对相关性指标, 记作  $E[a_{N+1} | a_1, \dots, a_N]$

根据Gram行列式的性质<sup>[3]</sup>, 我们有:

$$E[a_{N+1} | a_1, \dots, a_N] = \frac{G[a_1, \dots, a_N, a_{N+1}]}{G[a_1, \dots, a_N]} \quad (2.4)$$

可以证明: 若  $a_1, a_2, \dots, a_N$  为  $\varepsilon$ -线性相关, 则对任意向量  $a_{N+1}$  ( $\|a_{N+1}\| \leq 1$ ), 向量系  $a_1, \dots, a_N, a_{N+1}$  也必为  $\varepsilon$ -线性相关。这意味着, 相对相关性指标:

$$E[a_{N+1} | a_1, \dots, a_N] \leq 1 \quad (2.5)$$

注意到: 文献[2]中给出的奇异判断准则

$P$  也是行列式之比,但由于相应的向量系是没有标准化的,而可能有  $P \gg 1$ 。因此,  $P$  虽然在某种程度上能够反映新加向量对整个向量系相关性的影响,但是这个反映是不充分而有时是虚假的,它容易掩盖下述基本事实:新的向量的加入,只能增强(至少不能减弱)向量系的相关程度。

相对相关性指标作为相关性指标的一个补充,有利于提高结构辨识的准确度。但以其作为唯一的奇异性准则是不恰当的。计算结果表明,任一输出向量的加入,都有一较小的相对相关性指标值,而相应的相关性指标却可能仍然比较大。这说明唯一借助于相对相关性指标,可能给出过低的结构指标估计。

考虑到上述两方面的原因,我们认为:可以用相关性指标和相对相关性指标作“与”控制,即只当此二指标的计算值同时满足小于其给定值  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  时,才确定一个结构指标  $\nu_i$ 。

相关性指标和相对相关性指标的给定值  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  取多大为宜,是要加以研究的一个问题。取得过大则可能丢弃了 Guidorzi 方法的实质,而取得过小则除了可能给出不必要高的结构指标外,还可能造成数值计算上的问题。事实上,矩阵  $S = R^T R$  就是最小二乘参数估计的法方程系数矩阵<sup>[1]</sup>。如果依  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  很小时所得到的系统结构来辨识系统参数,由于这时相应的系数矩阵  $S$  的病态性已经很强,因此参数的最小二乘解将是不稳定的<sup>[3]</sup>,而显然这是我们所不希望的。

不难想到,引入相关性指标和相对相关性指标进行结构辨识,存在着指标数值的选取所造成的人为不确定性。这种不确定性在 [1]、[2] 的方法中也是存在的,而即便在诸如  $F$ -检验这样的结构后验检验方法中也是不可避免的。考虑到:第一,目前从有噪声数据中确定多变量系统结构的问题尚未解决,而作为一种结构检验前检验方法,它具有简单、计算量小的明显优点;第二,对于一个实际的系统,选定其模型为线性定常差分方程往往只是一种近似,而在这种只能近似满足的前提假设下,企

图寻求系统结构指标的唯一精确解不仅不现实,在逻辑上也是不严密的;因此,上述不确定性应是可以理解的。从另一角度说,若把结构辨识理解为使最终得到的系统数学模型的精度满足由辨识的目的所提出的要求,则上述不确定性不仅可以接受,结构辨识本身亦将比较容易和更具有实际意义。同时这样理解在本质上和 Zadeh 对辨识所下的经典定义<sup>[4]</sup>也是不矛盾的。事实上,例如用一个较低阶的模型来近似一个高阶的实际系统,在控制系统的综合、设计乃至分析上都是经常碰到的,也是解决问题的一个有效途径。类似地,认识到并指出前述结构辨识中的不确定性,并不妨碍我们实际应用这个方法在有噪声情况下,或者对于本质上不能用线性定常模型精确描述的系统,进行结构辨识,至少可以看成是一有用的辅助手段。

### 三 结构辨识及参数估计的程序框图、计算结果与分析

下面给出结构辨识和参数估计的程序框图,并以双输入双输出电加热炉系统为例给出系统的结构指标和参数的估计结果。

#### 1. 程序框图

系统结构辨识和修改的最小二乘参数估计 (MLS) 的程序框图如下。

现对下页的程序框图作几点说明:

(1) 根据 [1], 有噪声情况下用于结构辨识的矩阵  $S$  应为:  $\hat{S} = S^* - N\sigma^2 I$ , 这里  $S^*$  是直接由噪声数据得到的矩阵  $S$ , 而  $N\sigma^2 = \lambda_{m+n}$ ,  $\lambda_{m+n}$  是矩阵  $S^* (\mu_1 \cdots \mu_m)$  ( $\mu_m \geq \max(\nu_i)$ ) 的最小特征值。所以, 结构辨识可以从一较高阶模型开始。

(2) 若  $\mu_i \leq \mu_m (i=1, 2, \dots, m, r; m, r$  为输入数  $r$  和输出数  $m$  之和), 则  $S(\mu_1, \dots, \mu_{m+r})$  的所有元必定都是  $S(\mu_m, \dots, \mu_m)$  的元, 且这些元在  $S(\mu_1, \dots, \mu_{m+r})$  (框图中为  $SS(k_1, \dots, k_{m+r})$ ) 中的相对位置和在矩阵  $S(\mu_m, \dots, \mu_m)$  中一致。因此, 既然已经构造了矩阵  $S(\mu_m, \dots, \mu_m)$ , 则

元是等价的。

### 2. 计算结果

下面以双入双出的电加热炉为例，按不同情况，给出计算结果。这里选择 $\mu_M = 5$ 。

(1) 采用原始数据时的计算结果  
表1中下标“G”表示相应的向量系已标准化。 $\det S^*$ 及 $\lambda_{min}$ 分别是(1.19)所定义的矩阵S的行列式和最小特征值，而P则是由(1.22)给出的行列式之比。显然 $\lambda_{min}$ 就是[1]所给的奇异性判别准则，而P则是[2]所给的判别准则。 $\det S_c$ 和 $P_c$ 则是相关性指标值和相对相关性指标值。

(2) 原始数据折算后的计算结果  
为了说明当原始数据的数量级不同时，[1]、[2]给出的准则在数值上差异很大，而相关性指标和相对相关性指标则不受其影响，我们对原始数据进行折算。注意到关于系统的线性假设，首先将输入信号标么化，即设输入信号幅值为±1（因输入信号为M-序列伪随机码），相应的输出信号都除以a（a为M-序列幅值），处理后的结果计算如表2所示。

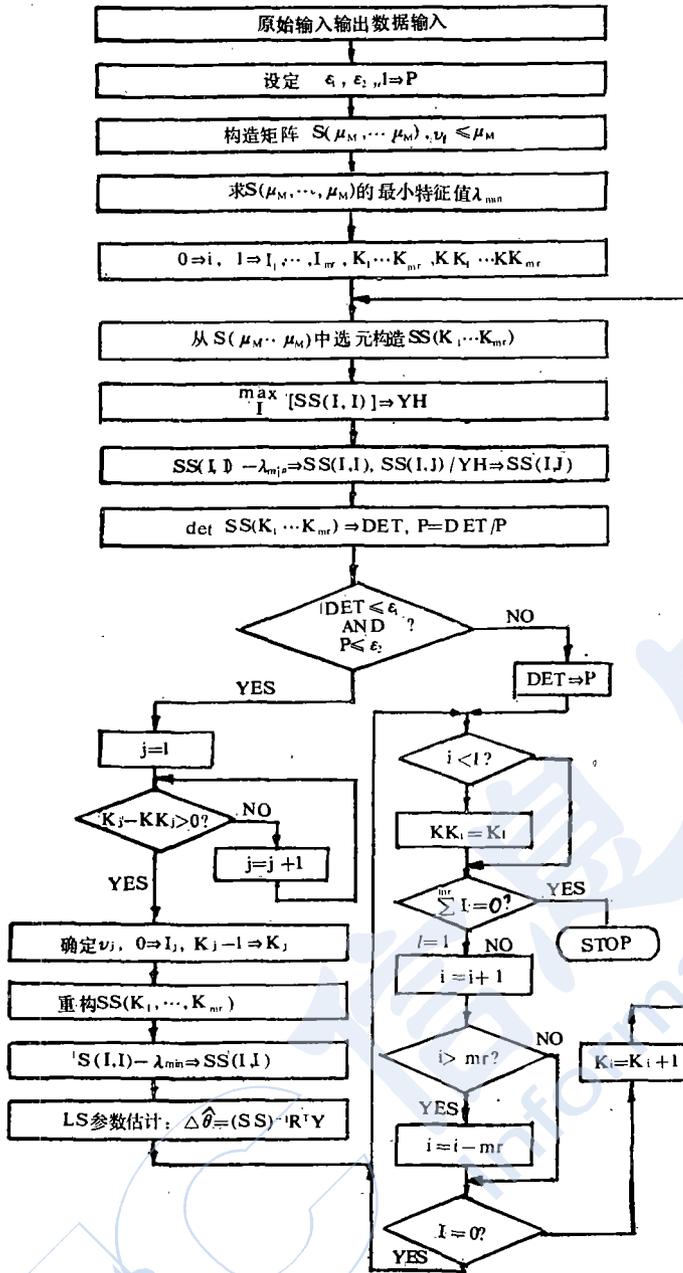
(3) 考虑噪声时的计算结果

考虑到量测数据中的噪声，由文献[1]，我们取 $\hat{S} = S^* - \lambda_{min} I$ ，这里 $\lambda_{min}$ 是 $S^*(5, \dots, 5)$ 的最小特征值。此处的输入输出数据亦经过折算。

### 3. 关于结构辨识的几点结论

对表1—3给出的结果进行分析，有下述结论：

(1) 以 $\det S^*$ 或 $\det \hat{S} (\hat{S} = S^* - N\sigma^2 I)$ 是否接近零作为矩阵的奇异性判定准则是不可行的。这是因为不论在哪种情况下其数值都过大，且数据越多、数量级越高则越明显。这可解释如下：既使向量组的线性相关性很强，使得相应的矩阵S的最小特征值已接近



从 $S(1, \dots, 1)$ 开始逐次增加矩阵阶数时，只要根据控制变量 $k_1, \dots, k_{mr}$ 从矩阵 $S(\mu_M, \dots, \mu_M)$ 中选出相应的一部分元即可得到 $S(\mu_1, \dots, \mu_{mr})$ ，而不需重新计算。

(3) 对向量系标准化可以通过对矩阵 $S(\mu_1, \dots, \mu_{mr})$ 的简单运算来完成。这是因为矩阵S主对角线上诸元依次是各量测向量长度的平方。因此，将向量系先标准化再求矩阵S，与先求矩阵S再将其诸元除以主对角线上最大

不同判别准则的比较 (I)

表 1

S	det S*	$\lambda_{min}$	P	det S <sub>G</sub>	$\lambda_{G.min}$	P <sub>G</sub>
(1,1,1,1)	$0.7021 \times 10^{25}$	$0.9305 \times 10^5$	—	$0.2966 \times 10^{-1}$	0.0237	—
(2,1,1,1)	$0.2263 \times 10^{31}$	$0.9140 \times 10^5$	$0.3223 \times 10^6$	$0.2438 \times 10^{-2}$	0.0233	0.0822
(2,2,1,1)	$0.2778 \times 10^{36}$	$0.5685 \times 10^5$	$0.1228 \times 10^6$	$0.7630 \times 10^{-4}$	0.0145	0.0313
(2,2,2,1)	$0.1081 \times 10^{43}$	$0.5668 \times 10^5$	$0.3891 \times 10^7$	$0.7570 \times 10^{-4}$	0.0145	0.9921
(2,2,2,2)	$0.4222 \times 10^{49}$	$0.5661 \times 10^5$	$0.3905 \times 10^7$	$0.7537 \times 10^{-4}$	0.0144	0.9956
(3,2,2,2)	$0.4885 \times 10^{54}$	$0.5429 \times 10^5$	$0.1157 \times 10^6$	$0.2223 \times 10^{-5}$	0.0138	0.0295
(3,3,2,2)	$0.4293 \times 10^{59}$	$0.5416 \times 10^5$	$0.8787 \times 10^5$	$0.4981 \times 10^{-7}$	0.0138	0.0224
(3,3,3,2)	$0.1654 \times 10^{66}$	$0.5331 \times 10^5$	$0.3852 \times 10^7$	$0.4892 \times 10^{-7}$	0.0136	0.9821
(3,3,3,3)	$0.6436 \times 10^{72}$	$0.5330 \times 10^5$	$0.3892 \times 10^7$	$0.4854 \times 10^{-7}$	0.0136	0.9922

不同判别准则的比较 (II)

表 2

S	det S*	$\lambda_{min}$	P	det S <sub>G</sub>	$\lambda_{G.min}$	P <sub>G</sub>
(1,1,1,1)	$0.5992 \times 10^9$	$0.8944 \times 10$	—	$0.2966 \times 10^{-1}$	0.0237	—
(2,1,1,1)	$0.1856 \times 10^{11}$	$0.8785 \times 10$	$0.3098 \times 10^2$	$0.2438 \times 10^{-2}$	0.0233	0.0822
(2,2,1,1)	$0.2091 \times 10^{12}$	$0.5464 \times 10$	$0.1180 \times 10^2$	$0.7630 \times 10^{-4}$	0.0145	0.0313
(2,2,2,1)	$0.8194 \times 10^{14}$	$0.5448 \times 10$	$0.3740 \times 10^3$	$0.7570 \times 10^{-4}$	0.0145	0.9921
(2,2,2,2)	$0.3075 \times 10^{17}$	$0.5441 \times 10$	$0.3753 \times 10^3$	$0.7537 \times 10^{-4}$	0.0144	0.9956
(3,2,2,2)	$0.3421 \times 10^{18}$	$0.5218 \times 10$	$0.1112 \times 10^2$	$0.2223 \times 10^{-5}$	0.0138	0.0295
(3,3,2,2)	$0.2889 \times 10^{19}$	$0.5206 \times 10$	$0.8446 \times 10^1$	$0.4981 \times 10^{-7}$	0.0138	0.0224
(3,3,3,2)	$0.1070 \times 10^{22}$	$0.5124 \times 10$	$0.3703 \times 10^3$	$0.4892 \times 10^{-7}$	0.0136	0.9821
(3,3,3,3)	$0.4001 \times 10^{24}$	$0.5123 \times 10$	$0.3741 \times 10^3$	$0.4854 \times 10^{-7}$	0.0136	0.9922
(4,3,3,3)	$0.4039 \times 10^{25}$	$0.5114 \times 10$	$0.1010 \times 10^2$	$0.1300 \times 10^{-8}$	0.0136	0.0268
(4,4,3,3)	$0.3097 \times 10^{26}$	$0.5045 \times 10$	$0.7668 \times 10^1$	$0.2644 \times 10^{-10}$	0.0134	0.0203
(4,4,4,3)	$0.1129 \times 10^{29}$	$0.4987 \times 10$	$0.3645 \times 10^3$	$0.2556 \times 10^{-10}$	0.0132	0.9670
(4,4,4,4)	$0.4206 \times 10^{31}$	$0.4980 \times 10$	$0.3725 \times 10^3$	$0.2526 \times 10^{-10}$	0.0132	0.9882

不同判别准则的比较 (III)

表 3

$\hat{S}$	det $\hat{S}$	$\lambda_{min}$	P	det $\hat{S}_G$	$\lambda_{G.min}$	P <sub>G</sub>
(1,1,1,1)	$0.2782 \times 10^9$	$0.4299 \times 10$	—	$0.1447 \times 10^{-1}$	0.0115	—
(2,1,1,1)	$0.6551 \times 10^{10}$	$0.4140 \times 10$	$0.2355 \times 10^2$	$0.9152 \times 10^{-3}$	0.0111	0.0632
(2,2,1,1)	$0.1540 \times 10^{11}$	0.8192	$0.2351 \times 10$	$0.5778 \times 10^{-5}$	0.0022	0.0063
(2,2,2,1)	$0.5573 \times 10^{13}$	0.8023	$0.3619 \times 10^3$	$0.5616 \times 10^{-5}$	0.0022	0.9719
(2,2,2,2)	$0.2051 \times 10^{16}$	0.7959	$0.3680 \times 10^3$	$0.5549 \times 10^{-5}$	0.0021	0.9882
(3,2,2,2)	$0.7303 \times 10^{16}$	0.5728	$0.3561 \times 10$	$0.5307 \times 10^{-7}$	0.0015	0.0096
(3,3,2,2)	$0.8699 \times 10^{16}$	0.5600	$0.1191 \times 10$	$0.1698 \times 10^{-9}$	0.0015	0.0032
(3,3,3,2)	$0.2754 \times 10^{19}$	0.4791	$0.3165 \times 10^3$	$0.1443 \times 10^{-9}$	0.0013	0.8501
(3,3,3,3)	$0.1005 \times 10^{22}$	0.4777	$0.3649 \times 10^3$	$0.1414 \times 10^{-9}$	0.0013	0.9799
(4,3,3,3)	$0.3290 \times 10^{22}$	0.4688	$0.3275 \times 10$	$0.1244 \times 10^{-11}$	0.0013	0.0088
(4,4,3,3)	$0.3110 \times 10^{22}$	0.4007	0.9454	$0.3158 \times 10^{-14}$	0.0011	0.0025
(4,4,4,3)	$0.8585 \times 10^{24}$	0.3427	$0.2760 \times 10^3$	$0.2341 \times 10^{-14}$	0.0009	0.7413
(4,4,4,4)	$0.3059 \times 10^{27}$	0.3352	$0.3563 \times 10^3$	$0.2240 \times 10^{-14}$	0.0009	0.9568

于零,但由于更多的比较大的特征值的存在而使得:

$$\det S = \prod_{i=1}^n \lambda_i \gg 0$$

而在理想情况下,若 $\lambda_{min} = 0$ ,则只要其余特征值为有限值,必有 $\det S = 0$ 。这是一很大的差别。

(2) 以矩阵 $S(\mu_1, \dots, \mu_m)$ 的最小特征

值 $\lambda_{\min}$ 的数据及变化趋势来进行判断。显然， $\lambda_{\min}$ 是与数据数量级及数据长度有关的，且在所给例子中都有 $\lambda_{\min} \gg 0$ 。但随矩阵 $S$ 增阶， $\lambda_{\min}$ 表现出单调下降趋势，这和相应的向量组线性相关性不断增强是一致的。此外， $\lambda_{\min}$ 的变化还比较明显地表现出陡峭下降和平坦下降的区别，这种转折点往往提供了结构指标 $v_i$ 的有用信息。〔1〕表明，Guidorzi也利用了这一性质。但由于 $\lambda_{\min}$ 的大小事先无法估计，不利于计算机判断。因此如〔1〕所表明的，采用 $\lambda_{\min}$ 进行结构辨识适合于作图的方法。

(3) 以 $P = \det S_{i+1} / \det S_i$ 是否接近零来判断。由所给例子可看到，在未对向量组标准化时， $P \gg 0$ ，且也与数据数量级有关。虽然在一定程度上 $P$ 的大小反映了新加向量对向量组线性相关性的影响，但由于随 $S$ 阵增阶，其数值是周期性起伏涨落的，因此它表明 $P$ 不能反映向量组整体的线性相关性。

(4) 相关性指标( $\det S_C$ )的大小是单调下降的，这与随向量组的向量数目增加，向量组的线性相关程度增强是一致的。相对相关性指标( $P_C$ )亦很好地反映了新加向量对向量组相关性的影响。不难看到，某一输出向量的加入往往使相对相关性指标产生一较大的下降变化，而输入向量加入时，此指标( $P_C$ )都接近于1。这和辨识实验时，输入不取决于输出而输出却依赖于输入这种物理上的因果关系是一致的。

(5) 计算还表明，不对向量系标准化时， $\det S$ 、 $\lambda_{\min}$ 及 $P$ 的大小不仅与数据数量级有关，也与数据组长度有关，实际上这是一个问题的不同表现。这显然是不利于这几个准则的实际应用的。而相关性指标和相对相关性指标与数据数量级无关，受数据组长度的影响亦很小，且其差别不是由长度不同造成的，而是由不同长度数据组的统计性质的偏差所造成的。这应该看成是采用这两个指标来进行结构辨识的一个很重要的优点。

(6) 采用上述二指标进行结构辨识的主要存在问题是其控制量 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 的大小选取问

题。我们的经验为：

$$(i) \text{ 对于 } \hat{S} = S^*, \varepsilon_1 = 10^{-5} \sim 10^{-7},$$

$$\varepsilon_2 = 0.05;$$

$$(ii) \text{ 对于 } \hat{S} = S^* - N\hat{\sigma}^2 I, \varepsilon_1 = 10^{-6} \sim 10^{-8}, \varepsilon_2 = 0.01;$$

以电加热炉系统为例，在上述经验值下的结构辨识结果如表4、表5所示，它们和采用其他结构(阶)检验方法所得结果是基本吻合的。

$\hat{S} = S^*$ 时的结构辨识结果 表4

结构指标	$\varepsilon_1$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$v_1$		2	3	3
$v_2$		2	2	2

$\hat{S} = S^* - N\hat{\sigma}^2 I$ 时的结构辨识结果 表5

结构指标	$\varepsilon_1$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$v_1$		2	2	3
$v_2$		2	2	2

#### 4. 参数估计

在结构辨识的基础上，〔1〕给出了下述修改的最小二乘估计：

$$\hat{r}_s = (S_s^* - N\hat{\sigma}^2 I)^{-1} R_s^T y_s^*(k + v_s) \quad (3.1)$$

这里：

$$\hat{r}_s^T = [ |a_{s1,1} \cdots a_{s1,v_{s1}}| \cdots |a_{ss,1} \cdots a_{ss,v_s}| \cdots |a_{sm,1} \cdots a_{sm,v_{sm}}| \beta(v_1 + \cdots + v_{s-1} + 1), 1 \cdots \beta(v_1 + \cdots + v_s), 1 | \cdots | \beta(v_1 + \cdots + v_{s-1} + 1), r \cdots \beta(v_1 + \cdots + v_s), r ] \quad (3.2)$$

其中下标 $S$ 表示是第 $S$ 个子系统， $S = 1, \dots, m$ ； $y_s^*(k + v_s)$ 、 $R_s^*$ 、 $S_s^*$ 分别由(1.16)、(1.18)、(1.19)给出；而 $N\hat{\sigma}^2 = \lambda_{\min}$ ， $\lambda_{\min}$ 是 $S^*(\mu_1 \cdots \mu_m)$ 的最小特征值。

对电加热炉系统，由表4、表5，取 $v_1 = v_2 = 2$ ，根据公式(3.1)，得系统的差分方程模型如下，且所得结果优于最小二乘估计。

$$\begin{bmatrix} z^2 + 0.2441z - 0.5604 & -0.9802z + 0.4859 \\ 0.3827z - 0.1815 & z^2 - 1.1659z + 0.01446 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3235z + 0.2743 \\ 0.2240z + 0.1963 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1079z + 0.1427 \\ 0.1322z + 0.1746 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

此时相应于 (1.1) 式的状态空间 Luenberger 规范形如下:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5604 & -0.2441 & -0.4859 & 0.9802 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1815 & -0.3827 & -0.1446 & 1.1659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3235 & 0.1080 \\ 0.4149 & 0.2459 \\ 0.2240 & 0.1322 \\ 0.3336 & 0.2874 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

附记: 本文承北京工业学院张志方副教授、冶金部自动化所陈振宇总工程师审阅, 并提出宝贵意见, 谨此致谢。

### 参 考 文 献

- (1) Guidorzi, R., Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems, *Automatica*, Vol.11, pp.361-374 (1975).
- (2) 王秀峰、卢桂章, 多变量线性系统的递推辨识算法, *自动化学报*, Vol.7, No.4, pp.274-282 (1981).
- (3) 南京大学, 最优化方法, 科学出版社, 1978.
- (4) Åström, K.J. and Eykhoff, P., Systems Identification—A Survey, *Automatica*, Vol.7, pp.123-162 (1971).

## 四 结 束 语

依本文所建议的引入向量系的标准化、相关性指标和相对相关性指标等概念, 作为有噪声情况下多变量系统结构辨识的判别准则, 使得结构辨识与数据数量级及数据组长度基本无关, 这是此方法的一个重要优点。采用所建议的结构辨识准则对双输入双输出电加热炉系统进行结构辨识的结果与用其他方法建模所得结果亦是基本一致的。

(上接封4)

术深入到各行业的桥梁作用; 各工业部门应当集中本部门的仿真技术力量及设备逐步形成仿真试验研究中心, 以推动本部门的仿真研究与应用; 在社会经济领域要重视发展仿真技术在社会经济预测方面的作用; 在仿真软件方面尽快组织力量制订我国的标准, 开发我国的仿真语言及仿真应用软件包; 训练仿真器不仅有其明显的经济效益, 而且从技术发展来看也是仿真技术发展的一个重要分支, 在一切熟练人员进行操作、控制、管理与决策的复杂系统中, 都应重视训练仿真器的研制与应用; 要重视物理仿真设

备的研制, 对一些通用的仿真设备要系列化、标准化。

4. 仿真技术本身就是一门新兴的边缘学科, 它涉及到控制、系统科学、计算技术等方面, 在其发展的过程中必将涉及其它学科领域, 因此在一些课题上出现交叉这是一种正常现象, 会议认为在发展仿真技术领域的一些基本方面(如仿真方法, 仿真计算机, 仿真软件, 物理仿真设备等)的同时, 还应重视一些交叉的领域(如系统辨识, 模型分析与处理, CSCAD 技术, 性能技术等)。

## ABSTRACTS

### **The Structure Identification for Multivariable System with its Application in Electrical Heating Furnace**

*Yang Weidong et al.*

On the basis of the method of structure identification by Guidorzi, a criterion for the identification of multivariable system with noise disturbance has been proposed through the normalization of the vector system and the introduction of the concept of the correlated and the relative correlated indices. The criterion has been used in the identification of the heating furnace, and the corresponding parameters estimated. The result of the computation shows that it is easier to estimate the model's parameters with this criterion than with those proposed by Guidorzi and (2). Moreover, it is not affected by the data magnitude and the data length  $N$ . (p.1)

### **Modern Control Theory Used in the Design of Servosystem for Large Precision Radar**

*Qian Weide*

In the servosystem for large precision radar, some problems that are related to the oscillation of velocity difference, the harmonic oscillation in the transmitting mechanism, and the load disturbance compensation have been analyzed with the aid of modern control concepts, such as state feedback, disturbance compensation, and state observer etc. And a new method is proposed that facilitates the radar servosystem design. (p.10)

### **The Use and Formation of a Data Base of Special Symbols for Engineering Drawing**

*Li Yanlin et al.*

In this paper, how to use the software package SYGEN to build interactively a data base of special symbols including Chinese characters for engineering drawing is presented. And the emphasis is laid on the modification of the TEKTRONIX software SYGEN with the view of facilitating data base formation, while raising its access speed and saving the core and disk space. Therefore, we can build and update the data base with ease. (p.17)

### **The R-2-3-4 Algorithm and its Application in Image Recognition**

*Qu Shankang*

The R-2-3-4 algorithm introduced in this paper is simple in logic. It can follow the contour of the curved region in the two-value matrices in order to extract