

# 具有n个非线性特性自动 调整系统自振荡的对数分析法\*

项 国 波  
(福州大学)

〔提要〕本文根据谐波线性化原理,利用对数特性求解具有  $n$  个非线性特性自动调整系统的自振荡,给出判别自振荡解的对数稳定判据。这里提供的对数法,不仅可以方便地求解有时滞的  $n$  个单值非线性系统自振荡,而且也适用于非单值非线性系统。最后,应用这里提出的方法,分析与综合两个自动调整系统自振荡问题:一个系统具有一个单值非线性和一个非单值非线性;另一个系统具有两个非单值非线性。指出两个非线性特性主参数对系统自振荡现象的影响。

## 一 问题的提出

许多自动调整系统常常含有两个或两个以上非线性特性。各个非线性特性各自对系统自振荡产生什么影响?它们在系统中所处的位置,以及它们主要参数之间相对大小对系统的影响如何?等等问题,都是感人兴趣的。一般来说,这些问题,对于二阶系统已有准确的解法<sup>〔1、10、11〕</sup>。对于高阶系统,就原则上来说,在满足一定条件下,利用谐波线性化原理,可以近似地研究  $n$  阶含有  $n$  个非线性系统自振荡问题。但是,由于计算方法的繁冗,三阶以上包含有两个以上非单值非线性系统,就研究得很少。文献〔2、8〕用谐波线性化方法研究了比较特殊的含有  $n$  个单值非线性串联系统的自振荡问题。文献〔8、9〕用了很大的计算工作量,研究了一个非单值非线性和一个单值非线性串联系统的自振荡问题。这里研究更普遍的含有  $n$  个有时滞或无时滞非单值非线性  $n$  阶系统自振荡问题。由于采用了标准化对数特性做为解曲线,解题被“积木”化了,计算工作量大为减少,使过去很难分析的一些问题,变成比较容易分析了。通过对两个具体系统的分析,可以发现

非线性特性在系统中所处的位置及它们参数相对大小对系统性能的影响。

## 二 确定自振荡参数的基本方程

假定所研究的非线性系统,经过结构变换后,可以演化为具有  $n$  个非线性特性间隔串联的自动调节系统。

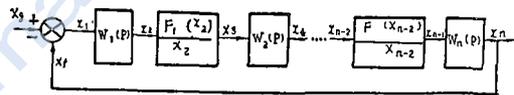


图 1

根据图 1 的结构,有如下方程组:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_g - x_f, & x_{2i} &= w_i(p) x_{2i-1}, \\ x_2 &= w_1(p) x_1, \quad p = \frac{d}{dt} & x_{2i+1} &= F_{2i-1}(x_{2i}) \\ & & \dots\dots, \\ x_3 &= F_1(x_2), & x_f &= -x_n. \\ x_4 &= w_2(p) x_3, \\ & \dots\dots, \end{aligned} \right\} (1)$$

式中,  $w_i(p)$  为线性组传递函数,它们均具有低通滤波特性;  $F_{2i-1}(x_{2i})$  为非线性特性,它们可以是单值的或非单值的,但都应满足获尼赫

\*本文曾在中国自动化学会1978年年会上宣读

利条件。满足上述条件，方程组（1）中所有非线性特性均可以用它们的谐波线性化系数来近似地描述。这时，系统中各种非线性输入端的振幅 $A_i$ 和频率 $\Omega$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，取决于如下齐次方程组的解：

$$1 + \prod_{\sigma=1}^{\mu} W_{\sigma}(j\omega) \prod_{i=1}^n W_{f,i}(A_i) = 0, \quad (2)$$

式中， $W_{\sigma}(j\omega)$ 为第 $\sigma$ 个线性环节的频率特性； $W_{f,i}(A_i)$ 为第 $i$ 个非线性特性谐波线性化系数。

与方程（2）等价的对数方程为：

$$20\lg H(\omega) = - \sum_{i=1}^n 20\lg H_{f,i}(A_i) \quad (3.1)$$

$$\theta(\omega) = - \left[ \sum_{n=0}^q \theta_{f,n}(A_i) + \pi \right] \quad (3.2)$$

式中， $H(\omega) = |W(j\omega)| = \prod_{\sigma=1}^{\mu} H_{\sigma}(\omega)$ ；

$$\theta(\omega) = \arg W(j\omega) = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \arg W_{\sigma}(j\omega)；$$

$$H_{f,i}(A_i) = |W_{f,i}(A_i)|；$$

$$\theta_{f,n}(A_i) = \arg W_{f,i,n}(A_i)。$$

其中， $q$ 为非单值非线性个数，且 $q \leq n$ 。

方程（3）中包含有 $n+1$ 个未知量，是一不可解出的方程。必须根据各个非线性特性在系统中的地位，把 $n-1$ 个未知量均置换成 $a_k$ ， $a_k$ 为第 $k$ 个非线性元件输入变量的振幅，这种置换关系的通式为

$$x_i = D_i(a_k, \omega) x_k, \quad (4)$$

式中， $D_i(a_k, \omega)$ 为把第 $i$ 个非线性元件输入变量 $x_i$ ，置换成第 $k$ 个非线性元件输入变量 $x_k$ 的变量置换函数。用对数法求解时，感兴趣的是振幅关系，故有

$$A_i = |D_i(a_k, \omega)| a_k, \quad (5)$$

$|D_i(a_k, \omega)|$ 可以根据各非线性在系统中相互关系来确定。

把方程（3）的 $a_i$ 均置换成 $a_k$ 后，自振荡

参数 $A_k$ 和 $\Omega$ 便取决于如下方程组的解：

$$20\lg H(\omega) = -20\lg H_{f,\Sigma}(A_k, \omega), \quad (6.1)$$

$$\theta(\omega) = -[\theta_{f,\Sigma}(A_k, \omega) + \pi]. \quad (6.2)$$

式中： $20\lg H_{f,\Sigma}(A_k, \omega) = \sum_{i=1}^n 20\lg H_{f,i}(A_k, \omega)$ ；

$$\theta_{f,\Sigma}(A_k, \omega) = \sum_{n=0}^q \theta_{f,n}(A_k, \omega)。$$

当 $q=0$ 时，系统中所有非线性均为单值的， $\theta_{f,\Sigma}(A_k, \omega) = 0$ ；当 $q=n$ 时，所有非线性均为非单值的。

显见，方程组（6）是一可解出方程，但在非线性特性等效传递函数中，显含参量 $\omega$ ，解题还是比较困难的。这就是谐波线性化原理不能在多非线性系统中，或与输入量微分有关的非线性系统中，得到更广泛应用的原因。因此只有在非线性对数函数中消去显含参量 $\omega$ ，解题才能得到进一步简化。根据方程组（6）的关系，用幅与相分别平衡的原则，就可以消去这个参量。例如，在图2中，绘制出 $\theta(\omega)$ 和 $-[\theta_{f,\Sigma}(a_k, \omega) + \pi]$ 的曲线簇后，根据方程（6.2）的相平衡关系，给定一序列 $\omega_i, i=1, 2, \dots$ ，过 $\theta(\omega)$ 曲线上的 $\omega_i$ 点，引一系列水平线，它们和曲线簇 $-[\theta_{f,\Sigma}(A_k, \omega) + \pi]$ 的交点，就确定了满足相平衡条件的点集 $(A_k, \omega_i)$ ，把这些点集连成光滑的曲线，就得到消去了 $\omega_i$ 后的曲线 $-[\theta_{f,\Sigma}(A_k) + \pi]$ 。同理，根据幅平衡关系，可以消去非线性特性合成对数幅特性中的 $\omega_i$ 。于是自振荡参数 $A_k$ 和 $\Omega$ 将取决于如下对数方程组的解：

$$20\lg H(\omega) = -20\lg H_{f,\Sigma}(A_k), \quad (7.1)$$

$$\theta(\omega) = -[\theta_{f,\Sigma}(A_k) + \pi]. \quad (7.2)$$

方程（7）的数学模型和具有单个非线性的系统的数学模型相同，因此参考文献〔3〕或〔4〕所提供的方法，在这里仍然适用。

如果系统中不仅具有 $n$ 个非线性，而且还有 $\mu$ 个时滞环节，则自振荡参数将取决于如下

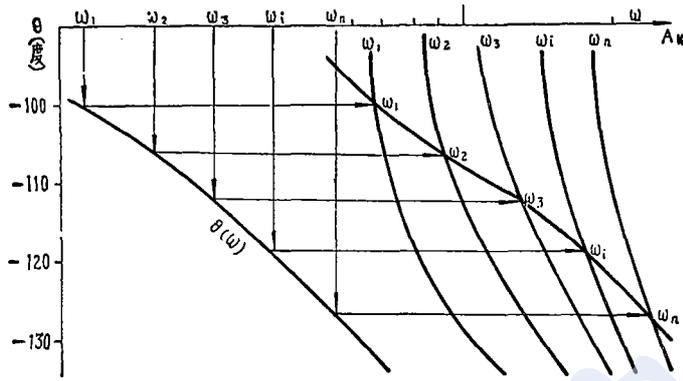


图 2

的对数方程组解:

$$20\lg H(\omega) = -20\lg H_{f,\Sigma}(A_k), \quad (8.1)$$

$$\theta(\omega) - \sum_{\mu=0}^{\mu} \tau_{\mu} \omega = -[\theta_{f,\Sigma}(A_k) + (2l+1)\pi], \quad (8.2)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots,$$

式中,  $\tau_{\mu}$  为时滞时间常数。

方程(8)指出, 由于时滞存在, 自振荡参数具有无穷多个解值, 但是, 只有当振荡周期  $T$  满足  $T \geq \tau_{\max}$  时, 才能激起自振荡, 其中  $\tau_{\max}$  为最大时滞时间常数, 故解仍然有限个。

### 三 周期解的稳定判据

虽然求解系统自振荡参数可以按方程(7)进行, 但是研究解的稳定性时却要研究方程(6)。应用线性系统 *Nyquist* 稳定判据, 可以证明具有  $n$  个非线性系统的周期解的稳定条件, 亦和具有单个非线性的系统的周期解的稳定条件具有相同的数学模型<sup>(9)</sup>:

$$\frac{\partial B}{\partial A_k} \Big|_{A_k} - \frac{\partial C}{\partial \omega} \Big|_{\omega} \frac{\partial \theta_f}{\partial A_k} \Big|_{A_k} / \frac{\partial \theta_{\Sigma}}{\partial \omega} \Big|_{\omega} < 0. \quad (9)$$

不同的是式中各函数分别为:

$$B(A_k) = L_{f,\Sigma}(A_k, \omega) = 20\lg H_{f,\Sigma}(A_k, \omega);$$

$$C(\omega) = L(\omega) + L_{f,\Sigma}(A_k, \omega) = 20\lg H(\omega) + 20\lg H_{f,\Sigma}(A_k, \omega);$$

$$\theta_f(A_k) = \theta_{f,\Sigma}(A_k, \omega);$$

$$\theta_{\Sigma}(\omega) = \theta(\omega) + \theta_{f,\Sigma}(A_k, \omega).$$

对每一具体的非线性系统, 都进行方程(9)的计算, 仍然是一件麻烦的事。但是, 如果把常见的非线性特性和频率特性按文献[3]加以分类, 则文献[3]所述的六条稳定判别法则在这里仍然适用, 而无需进行烦琐的运算。

### 四 三个单值非线性串联系统

为了比较应用对数法求解含有多个非线性特性的系统自振荡解的精度, 图3给出文献[8]介绍的三个单值非线性串联系统。

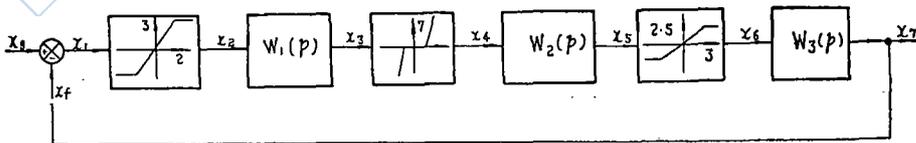


图 3

$$\text{图中, } W_1(p) = \frac{5(p+4)}{p^3+3p+5}, \quad (10)$$

$$W_2(p) = \frac{p^2+3p+5}{(p+2)(p^2+5p+6)}, \quad (11)$$

$$W_3(p) = \frac{10}{p+4}. \quad (12)$$

非线性特性谐波线性化系数分别为:

$$W_{f,1}(A_1) = k_{f,1}H_{f,1}(A_1);$$

$$W_{f,2}(A_2) = k_{f,2}H_{f,2}(A_2);$$

$$W_{f,3}(A_3) = k_{f,3}H_{f,3}(A_3).$$

$$\text{其中, } k_{f,1} = \frac{3}{2}, \quad k_{f,2} = 7, \quad k_{f,3} = \frac{2.5}{3}.$$

$$H_{f,1}(A_1) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{b_1}{A_1} + \frac{b_1}{A_1} \sqrt{1 - \left( \frac{b_1}{A_1} \right)^2} \right];$$

$$A_1 \geq b_1, \quad (13)$$

$$H_{f,2}(A_2) = 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{b_2}{A_2} + \frac{b_2}{A_2} \sqrt{1 - \left( \frac{b_2}{A_2} \right)^2} \right];$$

$$A_2 \geq b_2, \quad (14)$$

$$H_{f,3}(A_3) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{b_3}{A_3} + \frac{b_3}{A_3} \sqrt{1 - \left( \frac{b_3}{A_3} \right)^2} \right];$$

$$A_3 \geq b_3, \quad (15)$$

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 3.$$

系统自振荡参数取决于如下的对数方程组的解:

$$\left. \begin{aligned} 20 \lg H(\omega) &= - [20 \lg H_{f,1}(A_1) \\ &+ 20 \lg H_{f,2}(A_2) \\ &+ 20 \lg H_{f,3}(A_3)] \end{aligned} \right\} (16.1)$$

$$\theta(\omega) = -\pi. \quad (16.2)$$

$$\text{式中, } H(\omega) = |k_{f,1}k_{f,2}k_{f,3}W_1(j\omega)W_2(j\omega)W_3(j\omega)|;$$

$$\theta(\omega) = \arg W_1(j\omega) + \arg W_2(j\omega) + \arg W_3(j\omega).$$

根据图 3 结构, 存在下述关系:

$$\frac{A_1}{b_1} = H_3(\omega)k_{f,3}H_{f,3} \left( \frac{A_3}{b_3} \right) \frac{A_3}{b_3} \cdot \frac{b_3}{b_1}; \quad (17)$$

$$\frac{A_3}{b_3} = H_2(\omega)k_{f,2}H_{f,2} \left( \frac{A_2}{b_2} \right) \frac{A_2}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_3}. \quad (18)$$

利用方程 (17) 和 (18) 关系, 把方程 (16) 中,  $A_1$  和  $A_3$  置换成  $A_2/b_2$ , 于是自振荡解取决于

$$20 \lg H(\omega) = -20 \lg H_{f,2}(A_2/b_2), \quad (19.1)$$

$$\theta(\omega) = -\pi. \quad (19.2)$$

在图 4 上作出方程 (19) 的解曲线后, 求得两组自振荡解参数为:  $\Omega = 4, A_2 = 1.52$ ;  $\Omega = 4, A_2 = 6.52$ .

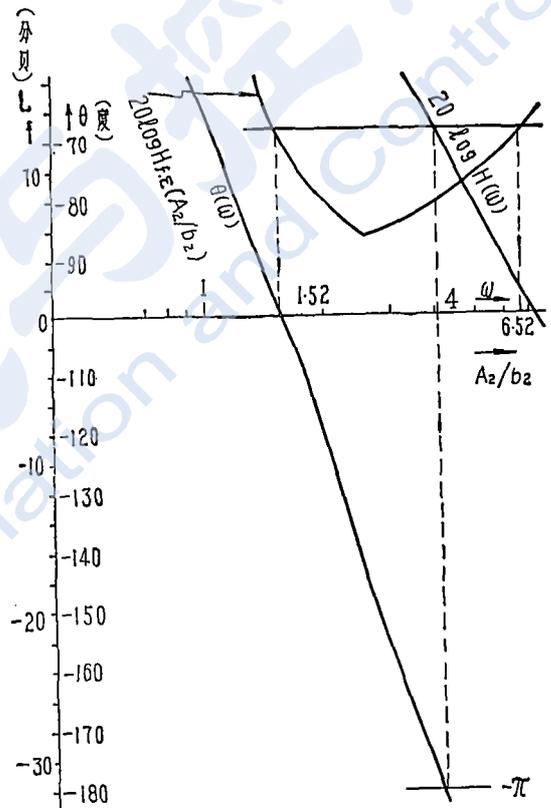


图 4

根据文献〔3〕给出的稳定法则 $V$ , 第一组解是不稳定的; 第二组解是稳定的。 $A_1$ 和 $A_3$ 数值可以根据方程 (17) 和 (18) 的关系加以换算, 其结果和参考文献〔8〕的结果均列于下表, 以资比较。结果表明对数法的精度是相当好的。

方 法		对数法	计算值*	实验值*
频 率	$\Omega$	4	4	3.93
不稳定解振幅	$A_1$	0.67	0.58	0.55
	$A_2$	1.52	1.52	1.52
	$A_3$	0.45	0.39	0.44
稳定解振幅	$A_1$	5.35	5.32	5.15
	$A_2$	6.52	6.56	6.54
	$A_3$	6.08	6.02	5.68

\* 摘自文献〔8〕的数值

### 五 饱和非线性和齿轮啮合间隙同时存在的双非线性系统

图5所示的系统是控制工程中最常见的系统。但是，到现在为止，尚不能说对它所有的问题都已经全面研究了。仅从稳定性的角度来考察，人们自然会问究竟什么条件下只要考虑饱和非线性对稳定性的影响？什么条件下只考虑啮合间隙非线性对稳定性的影响？什么条件下两个非线性又必须同时考虑。利用这里提出的对数法能够方便地回答这些问题。

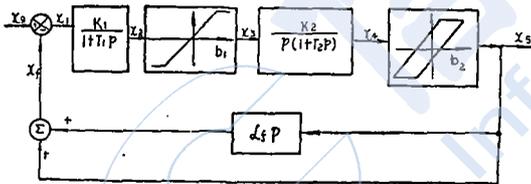


图 5

假定图5中， $\alpha_f = 0$ ，即测速反馈不存在。根据谐波线性化原理，自振荡参数取决于如下方程组的解：

$$20\lg H(\omega) = - [20\lg H_{f,1}(A_2) + 20\lg H_{f,2}(A_1)] \quad (20.1)$$

$$\theta(\omega) = - [\theta_{f,2}(A_1) + \pi] \quad (20.2)$$

式中， $H(\omega) = |K_1 K_2 / j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)|$ ；

$$\theta(\omega) = \arg W_1(j\omega) + \arg W_2(j\omega)；$$

$$H_{f,1}(A_2) = 2/\pi[\sin^{-1}(b_1/A_2) + b_1/A_2 \sqrt{1-(b_1/A_2)^2}] \quad (21)$$

$$H_{f,2}(A_1) = |q_{H,2}(A_1) + jq'_{H,2}(A_1)| \quad (22)$$

$$\theta_{f,2}(A_1) = \arctg[q_{H,2}'(A_1)/q_{H,2}(A_1)] \quad (23)$$

其中，

$$q_{H,2}(A_1) = 1/\pi[\pi/2 + \sin^{-1}(1-2b_2/A_1) + 2(1-2b_2/A_1) \sqrt{(b_2/A_1)(1-b_2/A_1)}] \quad (24.1)$$

$$q'_{H,2}(A_1) = -4b_2/\pi A_1(1-b_2/A_1), \quad A_1 \geq b_2 \quad (24.2)$$

设  $k_1 k_2 = 10$ ,  $k_1 = 1$ ,  $T_1 = 0.1$ ,  $T_2 = 1$ , 令  $b_1 = n b_2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ 。根据图5的结构，则有  $A_2/b_1 = H_1(\omega) H_{f,2}(A_1) A_1/b_2 \cdot 1/n$ 。 (25)

根据方程(25)的置换关系，自振荡解参数取决于如下对数方程组的解：

$$20\lg H(\omega) = -20\lg H_{f,2}(A_1/b_2, n) \quad (26.1)$$

$$\theta(\omega) = -[\theta_{f,2}(A_1/b_2, n) + \pi] \quad (26.2)$$

做出方程(26)的解曲线后，用文〔3〕或〔4〕的办法，便知，当  $b_1 \geq 10b_2$  时，即饱和放大器的线性区远比间隙宽度大得多时，两个非线性对系统的影响可以分别的加以考虑：在只考虑饱和非线性时，临界增益为20.8分贝，大于临界增益的系统，会发生强烈的自振，这时齿轮啮合间隙非线性相对来说，可以看成是线性的，因为，

$$\lim_{A_1 \rightarrow \infty} H_{f,2}(A_1) = 1 \quad \lim_{A_1 \rightarrow \infty} \theta_{f,2}(A_1) = 0.$$

当线性区很宽，增益很小，但齿轮啮合间隙很大时，临界增益为8分贝，大于8分贝的增益，系统中也会出现自振荡；当  $b_1 \leq 10b_2$  时，两个非线性对系统稳定性的影响要同时加以考虑。这个关系说明，当放大器的线性宽度很窄，它的数量级和齿轮啮合间隙相当时，这时临界放大系数为4.8分贝，系统的稳定性最差。

可见减少齿轮啮合间隙，加宽放大器的线性区，是提高系统稳定性的关键。把间隙减少到比饱和放大器线性区小一数量级时，系统的稳定性就显著地高提了。此外，采用各种校正

装置来抑制自振荡也是一种有效的措施,例如在图五系统中,接入微分反馈后,取 $\alpha_f = 1$ ,系统的自振便就消失了。

## 六 考虑齿轮啮合间隙的带回环的继电器控制系统

图6给出这样的系统,这里,齿轮啮合间隙和继电器回环宽度的相对大小,对系统自振荡参数有很大影响。当 $k_1 k_2 = -4$ 分贝, $T_1 = 0.1$ , $T_2 = 10$ , $\alpha_f = 0$ 时,应用这里提供的方法,

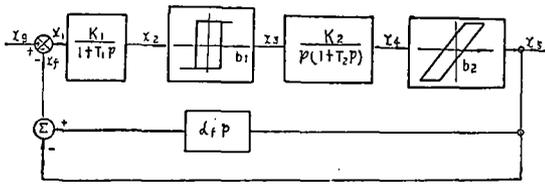


图 6

求得两个非线性参数 $b_1/b_2$ 对自振荡参数的影响如图7所示。图7指出当继电器回环宽度 $b_1$ 趋

于零时,容易在系统中激起强烈的自振荡;当 $b_1 \gg b_2$ 时, $A_1$ 虽然在某一区间是增加的,但是由于 $A_2$ 是单调减少的,当 $A_2 < b_1$ 时,自振荡将消失,这时增大了的回环宽度相当于不感区的作用,振荡虽然消失了,但静态误差却增加了。应用,微分反馈,虽能削弱自振强度,计算表明 $\alpha_f = 10$ 时,才能抑制这样系统的自振荡,但是这样深的微分反馈很难实现。因此, $b_1$ 和 $b_2$ 相对大小对系统运行性能有很大影响,这是设计、调整这类系统的特殊问题。

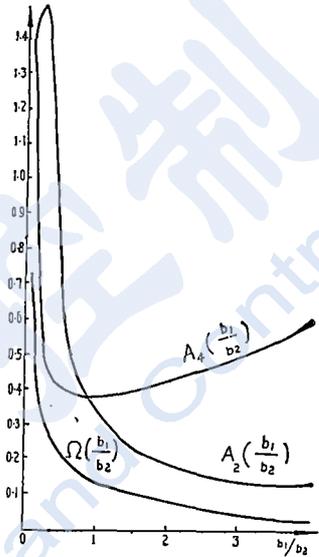


图 7

## 结 语

根据幅相分别平衡的原理,把对数法推广应用到含有 n 个非线性特性的系统,可以简便地研究一些用其它方法难分析的高阶的含有多个非线性系统的自振荡问题。由于所用的解曲线都是已经典型化的对数特性,计算工作量较之目前流行的描述函数法和 E. П. ПОПОВ 提出的代数法<sup>[1]</sup>少得多,便于工程计算。

## 参 考 文 献

- [1] Солодвников, В. В., Основы автоматического регулирования, машгиз, 1954.
- [2] 高为炳,用谐波平衡法研究具有 n 个非线性元件的单回路调节系统,《自动化学报》科学出版社,1964,第2卷,第3期。
- [3] 项国波,非线性自动调整系统自振荡之对数分析法,《福州大学学报》,1962,总第3期。
- [4] Вавилов, А. А., Метод исследования автоколебаний в релейных системах автоматического регулирования по логарифмическим характеристикам, автоматика и телемеханика, 23, 1962, №8.
- [5] Gran, R., and Rimer, M., Stability analysis of systems with multiple nonlinearities, IEEE, Trans. Automat. Contr. (Short paper), vol. AC-10, Jan, 1965.
- [6] Freeman, F. A., Stability analysis of control systems having two nonlinear elements. Proc. Inst. Elec. Eng. vol. 1016, July, 1962.
- [7] Davison, E. J., Application of the describing function technique in a single loop feedback system with two nonlinearities. IEEE, Trans, Automat. Contr. (Short paper) vol. AC-13, Apr. 1968.
- [8] Davison, E. J., and D. Constantinescu, A Describing Function Technique for multiple Nonlinearities in a Single-loop Feedback System, IEEE, Trans. Automat. Contr. (Short paper), vol. AC-16, Febr. 1971.
- [9] Kazumasa Hiarai, and Michiyoshi Kuwabara, Oscillations in relly servomechanisms with backlash,

(下转16页)

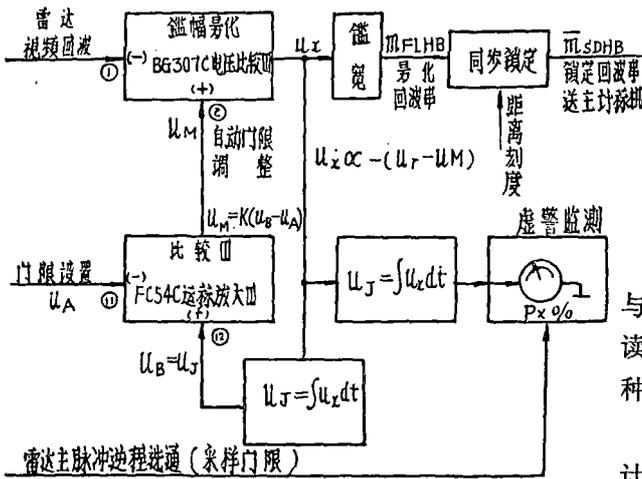


图3 回波预处理框图

以监测。要求  $P_x$  值恒定，则噪声起伏反映积分电压值改变依自动门限值的跟随改变实行调整。其调节原理概述如下：

设： $u_x \propto -(u_r - u_M) \rightarrow P_x$   
 若： $u_r \pm \Delta u_r$   
 则： $u_x \pm \Delta u_x$ ，随之， $u_J \pm \Delta u_J$   
 则： $u_M \pm \Delta u_M$ ，即  
 $u'_x \propto -[(u_r \pm \Delta u_r) - (u_M \pm \Delta u_M)]$   
 $= -(u_r - u_M \pm \Delta u_r \mp \Delta u_M)$   
 当： $\pm \Delta u_r \mp \Delta u_M \approx 0$   
 则： $u'_x \approx u_x$   
 故  $\Delta P_x \rightarrow 0$ ， $P_x$  保持恒定。

幅度量化后的回波串经距离刻度锁定处理

后，串行送入主计算机中的回波寄存器。然后，对同一距离的回波串按“1”密度判别准则（即第二门限）判出真目标，并寄存参数作跟踪处理。

### 三 结 语

XXC 机选用 2 千多 TTL 中速与非门、与或非门、与非功率门，D 触发器以及 SD31 读放、SL001 驱动源等标准电路；选用 20 多种 64 芯头的双面印制通用插件。

本机为保证读、写不发生错乱，在总体设计上安排由“排队”控制读、写时序的产生；并为尽量少用延时电路元件而在工程设计时充分利用维持逻辑技术。

在结构、工艺布局上，整机除了考虑电源滤波，合理走线，组件逻辑特性正确处理等问题外，还根据“大面积接地”原理，结构上采用机柜框架铝导轨，使插件边框地线（粗 6mm）直接接触框架金属件，形成“空间地网”。

这些措施对提高整机抗干扰能力有极大好处。

机器的调试分三级进行：本机分调、联调；终端分调（可以联一个终端）、联调；系统分调（计算机离线）、联机。

为调试方便，面板上设置必要的调试开关及指示灯。系统运行表明，机器工作可靠。

（上接 55 页）

制御工学，7，(1963)，№1。

- [10] 陈文杰，含有间隙的继电器系统中周期振荡的准确解，《自动化学报》，科学出版社，1965，第3卷，第4期。
- [11] 邵荣士，具有时延的继电器系统自持振荡的研究《自动化学报》，科学出版社，1965，第3卷，第4期。
- [12] 项国波，非线性自动调整系统近于正弦自振荡过渡过程的对数分析法，《福州大学学报》1964，总第6期。
- [13] 项国波，非线性自动控制系统若干问题的对数分析法，《自动化学报》科学出版社，1965，第3卷，第3期。
- [14] Попов, Е. П., Политов, И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, фимашгиз. 1960.

编者注：项国波同志在本刊1980年1期发表的“非线性自动控制系统中的谐波线性化原理”文末参考文献〔7〕应为此文，而原〔7〕~〔18〕应依次改为〔8〕~〔19〕。