第 29 卷第 2 期
2000 年 4 月

信 息 与 控 制
Information and Control

Vol. 29, No. 2
Apr., 2000

文章编号: 1002-0411(2000)02-0164-04

时滞控制系统鲁棒稳定性分析

刘祖润　张志飞
(湘潭工学院自动化工程系　湖南湘潭　411201)

摘　要: Lurie 型时滞控制系统是工程实践中经常遇到的一类重要的非线性控制系统, 本文通过构造 Lyapunov 函数, 提出了不确定性 Lurie 时滞控制系统 Robust 稳定的充分条件, 并给出了本文结果的一个应用实例.◦

关键词: 时滞系统, 鲁棒稳定, 李雅谱诺夫函数, 矩阵特征值
中图分类号: TP13　　　文献标识码: B

1　引言

时滞现象在实际系统中普遍存在, 从而产生了具有广泛工程应用背景的不确定性时滞系统, 其控制问题的研究具有十分重要的理论意义和应用价值, 并已成为控制理论界一个十分活跃的研究领域[1-8].

关于时滞系统鲁棒控制问题的研究, 迄今为止已取得了许多有意义的结果[4-8]. 近年来, 关于 Lurie 型不确定时滞系统的鲁棒稳定性研究也取得了一些进展[5-6]. 不确定性时滞系统鲁棒稳定性的时域分析方法主要有 Lyapunov 方法和特征根分析方法. Lyapunov 方法是通过构造 Lyapunov 函数, 利用 Lyapunov 稳定性理论来分析和判别不确定性时滞系统的鲁棒稳定性. 然而, 对于如何根据系统特点构造比较好的 Lyapunov 函数, 是值得探讨的一个问题, 目前还没有一个系统的方法.

本文通过构造一种 Lyapunov 函数, 提出了 Lurie 型不确定性时滞系统鲁棒稳定的充分条件.

引理 1　对于任一向量 $X, Y \in R^n$ 和矩阵 $A, P \in R^{n\times n}$ 及正实数 μ, 如果 P 正定, 则有

$$X^TA^TPY + Y^TPAX \leqslant \mu X^TA^TPAX + \frac{1}{\mu}Y^TPY \tag{1}$$

特别有

$$X^TPY + Y^TPX \leqslant \mu X^TPX + \frac{1}{\mu}Y^TPY \tag{2}$$

证明　对任一 n 维向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$, 由于对任一正实数 μ, 有

$$\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i\beta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\mu\alpha_i^2 + \frac{1}{\mu}\beta_i^2) \qquad (\mu > 0)$$

即

$$\alpha^T\beta + \beta^T\alpha \leqslant \mu\alpha^T\alpha + \frac{1}{\mu}\beta^T\beta$$

因 P 正定, 故存在非奇异矩阵 P_1, 使 $P = P_1^TP_1$.

◦　收稿日期: 1998-10-14
基金项目: 国家自然科学基金(69974031), 湖南省重点资助项目, 编号: 97-130

$$(P_1AX)^{\mathrm{T}}P_1Y + (P_1Y)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}P_1AX \leqslant \mu(P_1AX)^{\mathrm{T}}P_1AX + \frac{1}{\mu}(P_1Y)^{\mathrm{T}}P_1Y$$

即

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}P_1Y + Y^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}P_1AX \leqslant \mu X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}P_1AX + \frac{1}{\mu}Y^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}P_1Y$$

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PY + Y^{\mathrm{T}}PAX \leqslant \mu X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PAX + \frac{1}{\mu}Y^{\mathrm{T}}PY$$

若取 $A = E$(E 为 $n\times n$ 单位矩阵), 则有(2)式成立, 引理证毕.

引理 **2**　对任一给定的矩阵 $A\in R^{n\times n}$和向量 $X\in R^n$, 记 $\lambda_{\max}(A)$为矩阵 A 的最大特征值,

$$\| X \| = [X^{\mathrm{T}}X]^{\frac{1}{2}}, \qquad \| A \| = [\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A]^{\frac{1}{2}},\text{有}$$

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX \leqslant \| A \|^2 \| X \|^2 \tag{3}$$

证明　由于 $A^{\mathrm{T}}A$ 为对称矩阵, 故存在正交矩阵 $Q\in R^{n\times n}$, 线性变换

$$\xi = QX$$

将二次型

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX$$

化为

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2 \leqslant \lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)\xi^{\mathrm{T}}\xi$$

式中, $\lambda_i(i= 1, 2, \cdots, n)$为 $A^{\mathrm{T}}A$ 矩阵的特征值.

而

$$\xi^{\mathrm{T}}\xi = (QX)^{\mathrm{T}}QX = XQ^{\mathrm{T}}QX = X^{\mathrm{T}}X = \| X \|^2$$

因而

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX \leqslant \| A \|^2 \| X \|^2$$

证毕.

2　时滞系统鲁棒稳定性分析

讨论下列 Lurie 型时滞控制系统的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bx(t - \tau) + (b + \Delta b)f(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = c^{\mathrm{T}}x(t) \\ f(\cdot) \in K[0, k] = \{f(0) = 0, 0 < \sigma f(\sigma) \leqslant k\sigma^2\} \end{cases} \tag{4}$$

式中, $x(t), b, \Delta b, c\in R^n$; $A, B, \Delta A\in R^{n\times n}$, 且 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$; τ为非负常数; 不确定性因素矩阵 $\Delta A, \Delta b$ 满足

$$|\Delta A| = (|\Delta a_{ij}|) < K_1, \qquad |\Delta b| = (|\Delta b_{ij}|) < K_2$$

其中, $K_1\in R^{n\times n}$, $K_2\in R^n$ 为不确定因素矩阵上限.

定理 **1**　对于任一给定的正定矩阵 W, 如果存在正定矩阵 P 及正实数 μ, 满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = - W$$

$$\lambda_{\max}(W) - \left[\frac{1}{\mu}(\| K_1\|^2 + \| B\|^2 + k^2(\| K_2\|^2 + \| b\|^2)\| c\|^2) + 5\mu\right]\| P \| > 0$$

则系统(4)是鲁棒稳定的. 式中, $\lambda_{\min}(W)$为矩阵 W 的最小特征值.

证明　由 Lyapunov 矩阵代数方程, 对任一 $n\times n$ 正定矩阵 W, 由于 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$, 则必存在

$n\times n$ 正定 P, 满足[5] $A^{T}P+PA=-W$.

取 Lyapunov 函数

$$V(x(t),x(t-\tau))=x^{T}(t)Px(t)+\omega\int_{t-\tau}^{t}x^{T}(t)B^{T}Bx(t)\,dt\qquad(\omega>0)\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\dot{x}^{T}(t)Px(t)+x^{T}P\dot{x}(t)+\omega[x^{T}(t)B^{T}Bx(t)-x^{T}B^{T}Bx(t-\tau)]\\
&=x^{T}(t)[A^{T}P+PA+\Delta A^{T}P+P\Delta A+\omega B^{T}B]x(t)+x^{T}(t-\tau)B^{T}Px(t)\\
&\quad+x^{T}(t)PBx(t-\tau)+b^{T}Px(t)f(\sigma)+x^{T}(t)Pbf(\sigma)+\Delta b^{T}Px(t)f(\sigma)\\
&\quad+x^{T}(t)P\Delta bf(\sigma)-\omega x^{T}(t-\tau)B^{T}Bx(t-\tau)\leqslant x^{T}(t)[A^{T}P+PA+\Delta A^{T}P+P\Delta A\\
&\quad+\omega B^{T}B]x(t)+\mu x^{T}(t)Px(t)+\frac{1}{\mu}x^{T}(t-\tau)B^{T}PBx(t-\tau)\\
&\quad+\mu x^{T}(t)Px(t)\frac{1}{\mu}\Delta b^{T}f^{2}(\sigma)+\mu x^{T}(t)Px(t)+\frac{1}{\mu}\Delta b^{T}P\Delta bf^{2}(\sigma)\\
&\quad-\omega x^{T}(t-\tau)B^{T}Bx(t-\tau)=x^{T}(t)[A^{T}P+PA+\Delta A^{T}P+P\Delta A\\
&\quad+4\mu P+\omega B^{T}B]x(t)+\frac{1}{\mu}b^{T}Pbf^{2}(\sigma)+\frac{1}{\mu}\Delta b^{T}P\Delta bf^{2}(\sigma)\\
&\quad+x^{T}(t-\tau)\frac{1}{\mu}B^{T}PB-\omega B^{T}Bx(t-\tau)\leqslant-\lambda_{\min}(W)\\
&\quad+\{[\frac{1}{\mu}(\|K_{1}\|^{2}+k^{2}(\|K_{2}\|^{2}+\|b\|^{2})\|c\|^{2})+5\mu\|P\|\\
&\quad+\omega\|B\|^{2}\}\|x(t)\|^{2}+x^{T}(t-\tau)[\frac{1}{\mu}B^{T}B\|P\|-\omega B^{T}B]x(t-\tau)\end{aligned}$$

取 $\omega=\frac{1}{\mu}\|P\|$, 则当满足

$$\lambda_{\min}(W)-[\frac{1}{\mu}(\|K_{1}\|^{2}+\|B\|^{2}+k^{2}(\|K_{2}\|^{2}+\|b\|^{2})\|c\|^{2})+5\mu]\|P\|>0$$

时, 有 $\frac{dV}{dt}<0$, 故系统是鲁棒稳定的.

证毕.

推论 如果系统满足条件

$$\|K_{1}\|^{2}+k^{2}(\|K_{2}\|^{2}+\|b\|^{2})\|c\|^{2}+5+\|B\|^{2}<\frac{1}{\|P\|}$$

则系统是鲁棒稳定的.

证明 取 $W=E$, $\mu=1$, 由定理 1 即得结论.

3 应用实例

考虑下列实际工程系统的稳定性

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+Bx(t-\tau)+(b+\Delta b)f(\sigma(t))\\ \sigma(t)=c^{T}x(t)\\ f(\cdot)\in K[0,k]=\{f(0)=0,0<\sigma f(\sigma)\leqslant k\sigma^{2}\}\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-4&3\\-2&-5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.5&0.5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0.4\\0.4\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 \end{vmatrix}, \quad K_2 = \begin{vmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{vmatrix}$$

$$k = 1.0 \quad \mu = 0.5$$

取 $W = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, 经计算 $P \approx \begin{vmatrix} 0.235 & 0.0299 \\ 0.0299 & 0.2179 \end{vmatrix}$, $\lambda_{\min}(W) = 2$

$\| B \|^2 = 1.0$, $\| P \|^2 = 0.0663$, $\| b \|^2 = 0.32$, $\| c \|^2 = 2$, $\| K_1 \| = 0.5$, $\| K_2 \|^2 = 0.32$

$$\lambda_{\min}(W) - \Big[\frac{1}{\mu}(\| K_1 \|^2 + \| B \|^2 + k^2(\| K_2 \|^2 + \| b \|^2) \| c \|^2) + 5\mu\Big] \| P \| = 0.0533 > 0$$

因此系统是 Robust 稳定的.

文[6]提出的判别准则, 很难找到合适的参数使得相应的矩阵正定, 因此对上列系统难以判别其稳定性, 而且运算过程繁琐, 需要对高阶矩阵施行运算, 应用极不方便. 本文所提出的方法在不增加矩阵阶数的情况下只需对矩阵施行简单的范数运算即可得出结论, 因而使用简单.

参 考 文 献

1 赵素霞. 多个执行部件的 Lurie 控制系统的绝对稳定性. 中国科学, 1987, A(**8**): 785~792

2 Somolines A. Stability of Lurie-type Functional Equations. J Diff Eqs., 1977, **26**(2): 191~199

3 RaPopert L B. Problem of Absolute Stability of Control System with Several Nonlinear Stationary Compositions. Automat Telemekh, 1987, (5): 66~74

4 Popov V M, Halanay A. About Stability of Nonlinear Controlled Systems with Delay. Automatic Remote Control, 1962, **23**(7): 849~851

5 年晓红. Lurie 型控制系统的鲁棒决定稳定性. 控制理论与应用, 1995, **12**(5): 641~645

6 年晓红. 具有多个执行机构的 Lurie 控制系统的鲁棒稳定性. 自动化学报, 1998, **24**(4): **562~565**

7 Su I J, Huang C G. Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems. IEEE Trans. Autom. Cotrol., **1992**, AC-**37**(10): 1656~1659

8 徐道义, 刘新芝. Robust Delay-dependence Stability for Linear Systems with Nonlinear Parameter Perturbations. 控制理论与应用, 1998, **15**(4): 501~506

ROBUST STABILITY OF LURIE CONTROL SYSTEM WITH DELAY

LIU Zu-ren　ZHANG Zhi-fei

(*Dept. of Automation, Xiangtan Polytechnic University, Xiangtan, Hunan, China*, 411201)

Abstract: Lurie control system is an important nonlinear control system in engineering practicel. In this paper, by constructing Lyapunov function, the robust stability of Lurie direct control system is studied of, and some sufficient conditions in Hurwitz angular domain are obtained. Finally, an example is given to illustrate the application of our results.

Keywords: control system with time-delay, robust stability, lyapunov function, eigenvalue of matrix

作者简介

刘祖润(1952-), 男, 湘潭工学院自动化工程系副教授. 主要研究领域电力电子技术, 控制理论及应用, 神经网络, 人工智能等. 先后完成科研项目五项, 发表论文十余篇, 出版著作两部.

张志飞(1963-), 男, 硕士, 讲师, 主要研究方向自适应控制, 智能控制, 神经元网络, CAD, 图像处理等.