第 30 卷第 1 期
2001 年 2 月

信 息 与 控 制
Information and Control

Vol. 30, No. 1
Feb., 2001

文章编号: 1002-0411(2001)01-063-05

多用户公交网络系统的随机平衡分配模型

周 晶 盛昭瀚 何建敏
(东南大学经济管理学院 南京 210096)

摘 要: 本文考虑多用户情况下的公交网络系统的随机平衡分配问题, 建立了与其相等价的数学规划模型, 并提出有效的迭代算法. 由于线路容量的限制, 会导致乘客的过载延迟. 在本文的模型中, 乘客的过载延迟时间可由相应容量约束的拉格朗日乘子计算得到. 最后, 实例表明该模型和算法是合理的和有效的. *

关键词: 多用户, 公交网络, 随机用户平衡

中图分类号: TP13 文献标识码: B

A STOCHASTIC TRANSIT ASSIGNMENT MODEL FOR MULTI-CLASS USERS

ZHOU Jing SHENG Zhao-han HE Jian-min
(*School of Economics & Management, Southeast University Nanjing, 210096, P. R. China*)

Abstract: This paper proposes a stochastic user equilibrium assignment model for congested transit networks with multi-class users. The corresponding equivalent mathematical programming problem is formulated, where the different perception of various user classes such as workers and shoppers on the path travel time is considered. An iterative algorithm is also put forward. Finally, an example is given to show that the proposed model and solution algorithm are rational and effective.

Keywords: multi-class users, transit networks, stochastic user equilibrium

1 引言(Introduction)

公共交通系统是任何一个城市所不可缺少的重要交通工具. 它主要包括公共汽车, 地铁, 火车和轻轨火车. 我国是一个人口众多的发展中国家, 建立一个完善的城市公共交通系统是十分必要的. 因此, 城市公交系统问题的理论研究具有重要的现实意义.

近 50 年来, 交通问题的理论研究日趋成熟, 许多理论成果已成功地应用到实际问题中. 特别是 50 年代初, Wardrop[1]提出了著名的交通平衡理论, 为交通理论的深入研究奠定了基础. 之后, 许多学者[2~6]致力于交通平衡理论问题的研究. 但是, 对公交系统的平衡问题的研究尚未完善. 拥挤公交系统的平衡问题不同于基于路网的用户平衡问题. 公交网络系统平衡分配问题不同于路网车辆平衡分配问题, 后者考虑的是车流在路网上的分配问题, 前者则关心的是乘客在公交线路网络上的分配问题. 在公交网络系统中, 乘客的出行乘客除了包括公交车的运行时间和车费外, 还应当包括乘客在车站的等待时间(这与公交车的发车频率有关)和乘客的过载延迟时间. 所谓乘客的过载延迟时间是指: 由于乘客流量的增加以及车辆容量的限制, 乘客会不能搭载上第一辆到达的车辆, 而要等待额外的时间. 显然, 乘客的过载延迟时间会随着乘客流量的增大而上升. 由于公交车的运行时间只与路段交通状况有关, 而与乘客量无关, 因此乘客的出行成本随乘客流量的增大而增大, 从而导致乘客在公交线路网络上的平衡分配问题. 注意本文假定公交车的运行时间是固定的, 不考虑路段车流量的影响. 文献[7]给出了有容量限制的拥挤公交系统的随机平衡分配模型.

事实上, 由于城市公交乘客来自不同的群体, 如每日上班的工作人员和购物或旅游, 对路径的出行成本有不同的估计. 因此, 将乘客分类考虑应更符合实际情况, 更能有效预测乘客在各条公交线路上的流量分布. 本文将[7]中的模型推广之多用户公交系

* 收稿日期: 1999-08-09
基金项目: 国家九五科技攻关项目"96-A15-02-03"的资助

统的随机平衡分配问题, 并给出相应的求解算法. 最后, 给出实例分析结果.

2 公交网络系统的一般描述(Representation for the transit network)

一个公交网络系统由一组不同的公交线路(transit line)组成, 且每条线路上分布有若干上下乘客的站点. 一条公交线路(以后简称为线路)有一定的出车频率和服务类型. 线路上任何两个站点之间的一段称为线段, 不同的线路之间会有部分平行线段. 乘客从某一起点可能需要一次或多次换乘不同的线路而到达其目的地. 为区别起见, 我们称乘客从起点(origin)到终点(destination)所选择的可行通路为路径. 由于乘客在任意两个换乘点之间有多条不同的平行线路可供选择, 因此, 乘客在任意起迄点(OD)之间的路径选择不是唯一的.

文中用 $G=(N,S)$ 表示公交网络系统, 其中 N 表示公交车站点集合, S 表示所有线段组成的集合. 下面将给出文中所用符号:

U: 乘客分类集合;

W_j: 第 j 类乘客的 OD 对集合;

W: 所有乘客类的 OD 对集合, $W=\bigcup_{j\in U} W_j$;

R_w: OD 对 w 之间的路径集合;

f_s: 线段 s 的发车频率;

k_s: 线段 s 的容量.

c_s: 线段 s 的出行成本;

t_s: 在线段 s 上公交车的运行时间;

u_s: 线段 s 的等待时间;

d_s: 线段 s 乘客的过载延迟时间, 即由于乘客流量的增加以及车辆容量的限制, 乘客会不能搭载上第一辆到达的车辆, 而要等待额外的时间.

v_s: 线段 s 上的乘客流量;

v_s^j: 第 j 类乘客在线段 s 上的流量;

g_w^j: 第 j 类乘客在 OD 对 w 之间的需求量;

h_{rw}^j: 第 j 类乘客在路径 $r\in R_w$ 上的流量, $w\in W_j$;

在本文中, 我们假定乘客的需求量是固定的并给定. 如果路径量满足如下的条件(1)~(4), 则称之为可行流.

对第 $j\in U$ 乘客类, 以及每一 OD 对 $w\in W_j$,

$$\sum_{r\in R_w} h_{rw}^j = g_w^j \tag{1}$$

$$v_s^j = \sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{sr} h_{rw}^j \tag{2}$$

$$v_s = \sum_{j\in U} v_s^j \tag{3}$$

$$v_s \leqslant k_s \tag{4}$$

其中 a_{rs}是路径和线段的关联矩阵; 即当路径 r 包含线段 s 时取值 1, 否则为零.

线段成本 c_s 包括三部分: 即公交车的运行时间 t_s, 等待时间 u_s, 以及乘客过载延迟时间 d_s. 这里我们略去了车费, 并不影响平衡分配模型的建立. 于是, 对线段 s, $s\in L$, 其实际出行成本为:

$$c_s = t_s + u_s + d_2 \tag{5}$$

显然, 乘客的过载延迟时间会随着乘客流量的增大而上升. 由于公交车的运行时间只与线段交通状况有关, 而与乘客量无关, 因此乘客的出行成本随乘客流量的增大而增大, 从而导致乘客在公交线路网络上的平衡分配问题. 注意本文假定公交车的运行时间是固定的, 不考虑路段车流量的影响.

3 多用户公交网络平衡分配问题(The equilibrium assignment problem for the transit network with multi-class users)

由于乘客对每条路径的出行时间的估计有随机误差, 且不同类的乘客对路径出行时间的了解程度不同. 令 C_{rw}^j表示第 j 类乘客对路径 $r\in R_w$ 的出行时间的估计值(或称为理解出行时间[6]). 显然 C_{rw}^j是随机变量. 令 c_r^w 表示路径 $r\in R_w$ 实际出行成本:

$$c_r^w = t_r^w + u_r^w + d_r^w \tag{6}$$

其中 t_r^w 表示路径 $r\in R_w$ 上的实际运行时间, 即为线段运行时间之和; u_r^w 为路径 $r\in R_w$ 上的实际等待时间, 即为线段等待时间之和; d_r^w 为路径 $r\in R_w$. 上的实际乘客过载延迟时间, 即为线段过载延迟时间之和. 则有:

$$C_{rw}^j = c_r^w - \frac{1}{\theta_j}\xi_{rw}^j,\quad r\in R_w, w\in W_j \tag{7}$$

根据路径选择效用理论[8], ξ_{rw}^j是服从 Gumble 分布的随机变量. $\theta_j>0$ 是乘客对公交网络了解程度的一中度量参数. 对多用户问题, 不同乘客类的 θ_j 是不同的. 较大的 θ_j 值表示乘客对系统的了解较多. 根据随机效用最大理论, 在 ξ_{rw}^j是 Gumble 分布的假设下, 可知路径选择概率是 Logit 模式, 即:

$$P_{rw}^j = \frac{\exp(-\theta_j c_r^w)}{\sum_{k\in R_w}\exp(-\theta_j c_k^w)}\qquad r\in R_w \tag{8}$$

给定 OD 出行量 g_w^j, 随机平衡分配问题的基本约束是:

$$h_{rw}^j = g_w^j P_{rw}^j \tag{9}$$

由前面的分析, 注意到由于乘客过载延迟时间与乘客流量有关, 从而线段出行成本是与流量有关的, 即有: $c_s = c_s(v_s)$. 此外, 关于路径出行成本有:

$$c_r^w = \sum_{s\in S} c_s(v_s) a_{sr} \tag{10}$$

因此, 在 SUE 平衡点, 某个 OD 对之间所有已被选用的路径上, 并不一定有相同的出行成本, 取而代之的条件是(9)式必须满足. 此式中, 路径流量与 P_r^w 相关, P_r^w 与出行成本有关, 而路径出行成本又与线段出行成本有关, 线段出行成本又是流量的函数, 如此循环相依, 达成 SUE 的平衡条件. 所以, (9)式实质上是关于流量的不动点方程. 我们将证明如下命题:

命题 **3.1**　多用户公交网络的随机用户平衡分配问题等价于如下的数学规划问题(NP).

$$(\mathrm{NP})\ \min \sum_{j\in J}\sum_{s\in L}(t_s + u_s) v_s^j$$

$$+ \sum_{j\in J}\sum_{w\in W}\frac{1}{\theta_j}\sum_{j\in J}\sum_{r\in R_w}(\ln h_{rw}^j - 1) \tag{11a}$$

$$\text{s.t.} \sum_{r\in R_w} h_{rw}^j = g_w^j \quad j\in U\ w\in W \tag{11b}$$

$$v_s^j = \sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{sr} h_{rw}^j \quad j\in U\ s\in S \tag{11c}$$

$$v_s = \sum_{j\in U} v_s^j \leqslant k_s \quad s\in S \tag{11d}$$

$$h_{rw}^j \geqslant 0. \quad j\in U \quad r\in R_w\ w\in W \tag{11e}$$

证明　将(11c)式代入目标函数(13a)和(13d)式, 则问题(NP)的 Lagrangian 函数可表示为:

$$L' = \sum_{j\in U}\sum_{s\in L}(t_s + u_s)\sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{rs} h_{rw}^j$$

$$+ \sum_{j\in U}\sum_{w\in W}\frac{1}{\theta_j}\sum_{r\in R_w} h_{rw}^j(\ln h_{rw}^j - 1)$$

$$+ \sum_{j\in U}\sum_{w\in W_j} l_j^*\,(g_j^w - \sum_{r\in R_w} h_{rw}^j)$$

$$+ \sum_{s\in L} m_s(k_s - \sum_{j\in U}\sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{rs} h_{rw}^j) \tag{12}$$

其中 l_j^w 和 m_s 分别是约束(11b)和(11d)的 Lagrangian 乘子.

$$\frac{1}{\theta_j}\ln h_{rw}^j + \sum_{s\in r}(t_s + u_s) a_{rs} - \sum_{s\in r} m_s a_{rs} - l_j^w = 0,$$

$$r\in R_w,\ w\in W_j,\ j\in U \tag{13a}$$

$$\sum_{r\in R_w} h_{rw}^j = g_w^j \quad j\in U \tag{13b}$$

$$m_s \leqslant 0 \tag{13c}$$

$$m_s(k_s - \sum_{j\in U}\sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{rs} h_{rw}^j) = 0 \tag{13d}$$

令:

$$m_r^w = \sum_{s\in r} m_s a_{rs} \tag{14}$$

则(13a)可以写成:

$$\ln h_{rw}^j = -\theta_j(t_r^w + u_r^w - m_r^w) + \theta_j l_j^*,$$

$$r\in R_w,\ w\in W_j,\ j\in U \tag{15}$$

即:

$$h_{rw}^j = \frac{\exp(-\theta_j(t_r^w + u_r^w \cdot m_r^w))}{\sum_{k\in R_w}\exp(-\theta_j(t_k^w + u_k^w \cdot m_k^w))} g_w^j,$$

$$r\in R_w,\ w\in W_j,\ j\in U \tag{16}$$

从上式可见有:

$$m_s = -d_s \tag{17}$$

$$m_r^w = \sum_{s\in S} m_s a_{sr} = -d_r^w\ r\in R_w,\ w\in W \tag{18}$$

即线段容量约束的乘子即为线段乘客的过载延迟时间. 则(16)式即为:

$$h_{rw}^j = \frac{\exp(-\theta_j c_r^w)}{\sum_{k\in R_w}\exp(-\theta_j c_k^w)} g_w^j \tag{19}$$

显然上式即为基于 Logit 路径选择模式的随机用户平衡条件(9). 证毕.

值得指出的是, 由于对数函数的是严格凸的, 可知数学问题(11)的目标函数关于路径流量是严格凸的, 因此必定存在唯一的最优解.

4　求解算法(Solution)

由于直接求解数学规划问题比较困难, 鉴于该问题的特殊性, 本文基于[5]的算法给出一种迭代算法. 根据(15)式, 令

$$M_s = \exp(m_s) \tag{20}$$

$$L_w^j = \exp(l_j^*) \tag{21}$$

则由(14)式, (15)式可以改写为:

$$h_{rw}^j = \exp(-\theta_j(t_r^w + u_r^w))(\prod_{s\in r} M_s)^{\theta_j} L_j^w \tag{22}$$

我们给出算法步骤如下:

Step1　令 $M_s^{(n)} = 1, L_{jw}^{(n)} = 1, n = 1$;

Step2　对所有 s, 和 $j\in U$ 计算:

$$h_{rw}^j(\boldsymbol{L}_j^{(n)}, \boldsymbol{M}^{(n)}) = \exp(-\theta_j(t_r^w + u_r^w))$$

$$(\prod_{s\in r} M_s^{(n)})^{\theta_j} L_{jw}^{(n)}$$

$$\beta_s^{(n)} = k_s / \sum_{j\in U}\sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{rs} h_{rw}^j)(\boldsymbol{L}_j^{(n)}, \boldsymbol{M}^{(n)}),$$

$$M_s^{n+1} = \min[1, \beta_s^{(n)} M_s^{(n)}]$$

对所有 $w\in W_j$, $j\in U$, 计算:

$$\beta_{jw}^{(n)} = g_w^j / \sum_{r\in R_w} b_{wr}^j h_{rw}^j)(\boldsymbol{L}_j^{(n)}, \boldsymbol{M}^{(n)}),$$

$$L_{jw}^{n+1} = \beta_{jw}^{(n)} L_{jw}^{(n)}.$$

Step3　如果相邻两次的路径流量充分接近, 则计算如下的输出结果, 否则, $n = n+1$ 转 Step2.

对所有 $r\in R_w, w\in W$, 计算:

$$h_{rw}^{j} = h_{rw}^{j}(\boldsymbol{L}_j, \boldsymbol{M})$$

对所有 s, 计算:

$$v_s = \sum_{j\in U}\sum_{w\in W_j}\sum_{r\in R_w} a_{rs}h_{rw}^{j}$$

$$d_s = -\ln(M_s)$$

值得注意的是: 只要问题(NP)的约束是相互独立的, 则上述算法一定是收敛的[9].

5 实例分析(A numerical example)

图1给出一个简单的公交网络, 由四条公交线路L_1, L_2, L_3, L_4组成. 有关网络的初始数据列于表1中. 令L_2^1, L_2^2分别表示线路L_2上从A到X的线段和从X到Y的线段; 同样, 令L_3^1, L_3^2分别表示线路L_3上从X到Y的线段和从Y到B的线段. 显然, 线路L_1提供了从A到B的直达快捷服务.

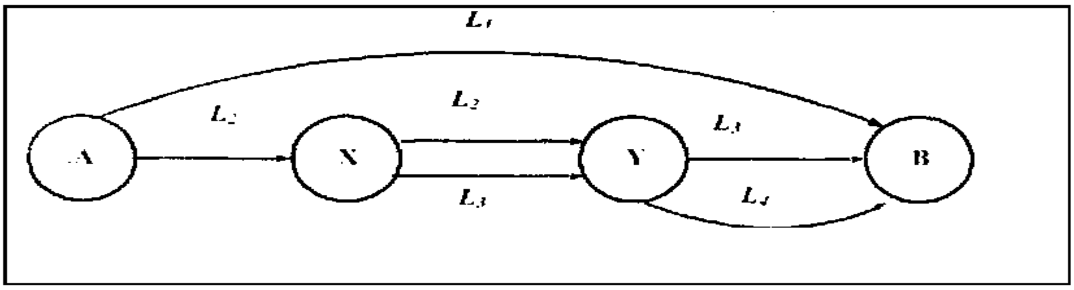

图1 一个简单的公交网络

Fig.1 A simple transit network

表1 初始数据

Tab.1 Basic link data for the example transit network

	线段流量					
	L_1	L_2^1	L_2^2	L_3^1	L_3^2	L_4
f_s(车/h)	5	5	5	5	5	5
t_s(min)	30	12	12	10	10	10
k_s(人/h)	200	180	130	70	100	100

假定有两类乘客, 且$\theta_1 = 0.1$和$\theta_2 = 0.5$. 为便于比较, 不妨假设两类乘客具有相同的OD出行方向, 从A到B, 和相同需求量皆为150人/h. 计算结果列于表2. 由表2可见, $\theta_2 > \theta_1$表明第二类乘客比第一类乘客具有较多的公交网络信息, 因此在快捷线路L_1上具有较大的流量. 此外, 我们还给出了具有OD需求量为300, 单一用户情况下的计算结果列于表2, 以便比较. 由表2可见, 多用户模型与单用户模型的计算结果是不同的. 由此可见, 如果不将乘客分类, 将他们对公交线路的了解程度视为相同, 则会得到的错误的乘客流量分布结果. 以线路L_1为例, 对较小的θ值, 得到较低的乘客流量估计, 而对较大的θ值, 则得到较大的乘客流量估计. 而将乘客按其对公交线路的了解程度进行分类, 则得到较合理的流量分布估计结果.

表2 计算结果

Tab.2 The results of two-class users and single class user

		线段					
		L_1	L_2^1	L_2^1	L_3^1	L_3^2	L_4
多用户模型	第一类 $\theta_1 = 0.1$	45	105	53	52	54	51
	第二类 $\theta_2 = 0.5$	115	35	17	18	20	15
	总线段流量	160	140	70	70	74	66
	过载延迟时间	0	0	0	0.52	0	0
单用户模型 $\theta = 0.1$	线段流量	120	180	110	70	92	88
	过载延迟时间	0	2.55	0	3.02	0	0
单用户模型 $\theta = 0.5$	线段流量	200	100	43	57	58	42
	过载延迟时间	0.78	0	0	0	0	0

6 结论(Conclusion)

本文对公交网络系统, 考虑多用户情况下的随机平衡分配问题, 建立了与其相等价的数学规划模型, 并提出有效的迭代算法. 由于线路容量的限制, 会导致乘客的过载延迟. 在本文的模型中, 乘客的过载延迟时间可由相应的拉格朗日乘子计算得到. 最后给出实例分析, 结果表明多用户模型和单用户模型会导致不同的流量分布结果. 本文所提出的模型和算法可以用于城市公交网络系统的乘客流量分布预测, 为城市公交网络系统的设计和规划提供可靠的理论依据.

参 考 文 献 (References)

1 Wardrop J G. Some Theoretical of Road Traffic Research. Proceedings of the Institute of Civil Engineers, 1952, **1**Part 2: 325~378,

2 Daganzo C F, Sheffi Y. On the Stochastic Models of Traffic Assignment. Transportation Science, 1977, **11**: 253~274

3 Sheffi Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J, 1985

4 Bell M G H. Stochastic user Equilibrium Assignment in Networks with Queues. Transportation Research, 1995, **29**B: 125~137

5 黄海军. 城市交通网络平衡分析理论与实践. 人民交通出版社, 1994

6 Fisk C. Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment. Transportation Research, 1980, **14**B: 243~255

7 Lam W H K, Gao Z Y, Chan K S, Yang H. A Stochastic user Equilibrium Assignment Model for Congested Transit Networks, Transportation Research, 1999, **33**B: 351~368

8 Ben-Akiva M, Lerman S R. Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand. MIT press, Cambridge, MA., 1985

9 周 晶. 公共交通网络系统的均衡配流、最优设计及其经营博弈研究. 东南大学博士论文, 1999

作者简介

周 晶(1963-), 博士, 副教授. 研究领域为复杂系统的优化与博弈, 城市交通的建模与优化, 决策与决策支持.

中国自动化学会第十六届青年学术年会(YAC' 2001)
征 文 通 知

中国自动化学会第十六届青年学术年会(YAC' 2001)将于 2001 年 7 月 15~17 日在山水甲天下桂林召开. 本次会议由中国自动化学会、中国自动化学会青年工作委员会主办, 桂林电子工业学院和桂林空军学院联合承办.

一 征文范围

(1)线性与非线性系统控制; (2)自适应控制和预测控制; (3)H_∞控制和鲁棒控制; (4)智能控制、模糊控制; (5)系统辨识与建模; (6)故障诊断与容错控制; (7)神经网络及控制; (8)自动化仪表与过程控制; (9)软件工程、并行处理; (10)人工智能与专家系统; (11)计算机视觉、图象处理与模式识别; (12)机器人与机器人控制; (13)大系统; (14)电力系统及其自动化; (15)电机驱动及运动控制; (16)传感器与检测技术; (17)离散事件动态系统; (18)计算机集成制造系统; (19)计算机软硬件技术及其应用; (20)系统工程理论、方法及其应用; (21)自动化指挥系统; (22)数据融合与软测量; (23)单片机控制及应用技术; (24)企业改革、发展策略及管理决策; (25)工业过程与生产管理; (26)图书馆自动化与数字图书馆技术; (27)其它.

二 征文要求

(1)被录用论文将由正式出版社出版《自动化理论、技术及应用》(卷 8), 论文应具有一定的学术或实用价值, 未在国内外学术期刊或会议发表过; (2)论文第一作者的年龄不超过 40 岁; (3)来稿中英文皆可, 请用 word97 文稿编排, A4 纸打印, 一式三份并附软盘; (4)格式参考自动化学报; (5)投稿时请注明文章所属的方向(见征文范围); (6)请说明联系作者的详细通讯地址、电话及电子邮件信箱; (7)因版权等引起的纠纷, 作者自负.

(下转第 84 页)