

文章编号: 1002-0411(2000)01-021-06

切换系统的稳定性及镇定控制器设计

翟长连 何 苇 吴智铭

(上海交通大学自动化系 上海 200030)

摘 要: 由稳定子系统构成的切换系统经无限次切换可能产生不稳定, 本文利用李亚谱诺夫函数法, 给出了确保由微分方程和差分方程描述的切换系统渐近稳定的充分条件, 在此基础上给出了不受切换条件限制的, 但能使切换系统渐近稳定的镇定控制器设计方法, 该方法简单且易实现, 并以一个例子作了说明。

关键词: 切换系统, 稳定性, 控制器

中图分类号: TP13

文献标识码: B

1 引言

一个切换系统包括 $m(m > 1)$ 个线性自主的子系统, 当系统的状态或时间等满足某种条件时, 子系统就发生变化, 由一个子系统切换到另一个子系统, 它表现为非线性系统或参数时变系统, 这样的系统是存在的, 如多控制器切换系统. 由于混合动态系统的发展, 近年来切换系统倍受众多学者的关注.

对于切换系统的稳定性及其控制问题, 已有诸多学者发表了研究成果, 文[1]研究了如何使包含两个不稳定的线性定常系统的切换系统稳定; 文[2]引入多个类 Lyapunov 函数方法, 分析切换系统的稳定性; 文[3]给出了多个独立子系统不稳定, 但切换系统稳定的充分条件; 文[4]利用 Lyapunov 函数方法, 给出使系统稳定的多个控制器切换方法.

由于多个稳定的子系统相互切换可能造成切换系统的不稳定性^[2], 本文讨论了由多个稳定的独立子系统构成的切换系统, 给出不管子系统如何切换, 切换系统均能保持渐近稳定的充分条件, 并利用此条件给出了使系统渐近稳定的镇定控制器设计方法.

2 系统模型及问题

考虑如下的线性自主切换系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(t) A_i x(t) \quad (1)$$

式中, $x \in R^n$, $\omega: R \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, m$, $m < \infty$, $\sum_{i=1}^m \omega_i(t) = 1$, $\omega_i(\tau) = 1$ 表示子系统 A_i 在时间 τ 是活动的, $\forall t$, $\lim_{t \rightarrow \tau_j^-} \omega_i(t)$, $\lim_{t \rightarrow \tau_j^+} \omega_i(t)$ 存在, 也就是说, 如果 $\omega_i(\tau_j^-) = 0$ 和 $\omega_i(\tau_j^+) = 1$, 那么系统 A_i 活动的, 此时系统即为 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$. 时间 τ_j 称为切换时间.

本文也研究差分表示的切换系统(离散切换系统), 即有:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^m \omega_i(k) A_i x(k) \quad (2)$$

式中符号同前.

下面考虑切换系统在李亚谱诺夫意义下的稳定性:

定义 1 称 $x_e = 0$ 是系统(1)(或(2))的平衡点, 如果有 $\sum_{i=1}^m \omega_i(t) A_i(0) \equiv 0$ (或 $\sum_{i=1}^m \omega_i(k) A_i(0) \equiv 0$)

定义 2 对切换系统(1)(或(2)), 若任取 $\epsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ 均存在 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \delta(\epsilon, t_0)$ 时有 $\|x(t, x_0, t_0)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$, 则称切换系统(1)或(2)的平衡点是 $x_e = 0$ 稳定的.

定义 3 对系统(1)或(2), 若 1) 其平衡点 $x_e = 0$ 是稳定的; 2) 存在 $\eta(t_0) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \eta(t_0)$ 时有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0, t_0) = 0$; 则称系统(1)或(2)是渐近稳定的.

问题是: 当子系统 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ (或 $x(k) = A_i x(k)$ $i = 1, \dots, m$ 是渐近稳定的, 在什么条件下, 切换系统仍是渐近稳定的.

3 稳定性的充分条件

首先看一离散切换系统的例子.

例 1 设离散切换系统为

$$x(k+1) = A_1 x(k) = \begin{bmatrix} -0.0098 & 0.3008 \\ -3.0079 & -0.0098 \end{bmatrix} x(k),$$

$$x(k+1) = A_2 x(k) = \begin{bmatrix} 0.4822 & -0.7818 \\ 0.8600 & 0.4822 \end{bmatrix} x(k)$$

子系统 $x(k+1) = A_i x(k)$, $i = 1, 2$ 都是渐近稳定的, 但是切换系统

$$x(k+1) = \begin{cases} A_1 x(k) & x_1(k) < 0 \text{ and } x_2(k) > 0 \text{ or } x_1(k) > 0 \text{ and } x_2(k) < 0 \\ A_2 x(k) & x_1(k) > 0 \text{ and } x_2(k) > 0 \text{ or } x_1(k) < 0 \text{ and } x_2(k) < 0 \end{cases}$$

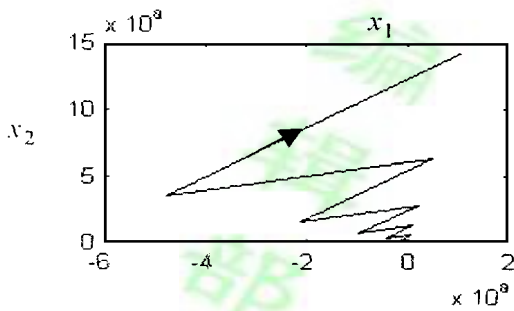


图 1 例 1 的切换系统状态轨迹

是发散的, 相平面图见图 1, 2, 3, 初始值为 $(1, 0)^T$, 初始值分别为 $(1, 0)^T, (0, 1)^T, (1, 0)^T$. 对于连续时间切换系统的例子可见文[2].

由文[7]的有关结论, 显然有:

定理 1 对于连续切换系统(1), 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$, $V(0) = 0$, 并且对状态空间 x 中的一切非零点, x 满足如下条件: (i) $V(x)$ 为正定; (ii) $\dot{V}(x)$ 为负定; (iii) 当 $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ 时, $V[x(t)] \rightarrow \infty$ 则称系统(1)的平衡点是渐近稳定的.

定理 2 对于离散切换系统(2), 如果存在一个标量函数 $V(x(k))$, $V(0) = 0$, 并且对状态空间 x 中的一切非零点, $x(k)$ 满足如下条件:

(i) $V(x(k))$ 为正定; (ii) $\Delta V(x(k))$ 为负定; (iii) 当 $\|x(k)\| \rightarrow \infty$ 时, $V[x(k)] \rightarrow \infty$ 则称系统(2)的平衡点是渐近稳定的.

定理 3 对于上面描述的连续模型(1), 如果存在一个共同的正定矩阵 P , 使得对于所有的子系统均有 $A_i^T P + P A_i < 0$, ($i = 1, 2, \dots, m$), 则系统的平衡状态是渐近稳定的.

证明 考虑 $V[x(t)] = x^T(t) P x(t)$

显然满足: (a) $V(0) = 0$; (b) 当 $x(t) \neq 0$ 时, $V[x(t)] > 0$; (c) 当 $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ 时, $V[x(t)] \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \dot{V}[x(t)] &= \dot{x}^T P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) = \left[\sum_{i=1}^m \omega_i A_i x(t) \right]^T P x(t) + x^T(t) P \left[\sum_{i=1}^m \omega_i A_i x(t) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_i x^T(t) (A_i^T P + P A_i) x(t) \end{aligned}$$

由定理的已知条件, 即有 $\dot{V}[x(t)] < 0$, 可见 $V[x(t)]$ 是一个李雅普诺夫函数. 定理得证.

定理 4 对于离散模型(2), 如果存在一个共同的正定矩阵 P , 对于所有子系统均有 $A_i^T P A_i - P < 0 (i = 1, 2, \dots, m)$, 则系统的平衡状态是渐近稳定的.

证明 考虑函数 $V[x(k)] = x^T(k) P x(k)$

满足 (a) $V(0) = 0$; (b) 当 $x(k) \neq 0$ 时, $V[x(k)] > 0$; (c) 当 $\|x(k)\| \rightarrow \infty$ 时,

$$V[x(k)] \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \Delta V[x(k)] &= V[x(k+1)] - V[x(k)] = x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) \\ &= \left[\sum_{i=1}^m \omega_i A_i x(k) \right]^T P \left[\sum_{i=1}^m \omega_i A_i x(k) \right] - x^T(k) P x(k) = x^T(k) \left[\sum_{i=1}^m \omega_i A_i \right]^T P \left(\sum_{i=1}^m \omega_i A_i \right) \\ &\quad - P x(k) = \sum_{i,j=1}^m \omega_i \omega_j x^T(k) (A_i P A_j - P) x(k) = \sum_{i=1}^m (\omega_i)^2 x^T(k) (A_i P A_i - P) x(k) \\ &\quad + \sum_{i < j}^m \omega_i \omega_j x^T(k) (A_i^T P A_j + A_j^T P A_i - 2P) x(k) \\ &\quad \left(\text{由于} \sum_{i=1}^m \omega_i(t) = 1, \omega_i: R \rightarrow \{0, 1\}, i = 1, \dots, m \quad \forall i < j, \omega_i \omega_j = 0 \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (\omega_i)^2 x^T(k) (A_i P A_i - P) x(k) \end{aligned}$$

由于 $\omega_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ 且 $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$, 又假设 P 是正定矩阵, 根据定理条件, 上式小于零, 即有 $\Delta V[x(k)] < 0$, 所以该系统是渐近稳定的. 定理得证.

定理 3、4 只是判断稳定性的充分条件, 当找不到共同的 P 满足定理 3、4 的条件时, 并不能由此来判定切换系统是否稳定. 还有一点值得注意: 若每个系统均稳定, 即对每个子系统均能找到正定矩阵 P_i 使 $A_i^T P_i + P_i A_i < 0$ 或 $A_i^T P A_i - P < 0$, 并不能保证整个系统一定稳定, 而必须找到一个共同的 P , 使得 $A_i^T P_i + P A_i < 0$ 或 $A_i^T P A_i - P < 0 (i = 1, 2, \dots, m)$, $A_i A_j$ 才能保证整个系统的稳定.

由定理 3、4, 即有:

推论 1 对于上面描述的连续模型(1), 如果切换系统不是渐近稳定的, 则一定不存在一个共同的正定矩阵 P , 使得对于所有的子系统均有 $A_i^T P + P A_i < 0, (i = 1, 2, \dots, m)$.

推论 2 对于离散模型(2), 如果切换系统不是渐近稳定的, 则一定不存在一个共同的正定矩阵 P , 使得对于所有子系统均有 $A_i^T P A_i - P < 0 (i = 1, 2, \dots, m)$.

上述定理给出了判断系统稳定性的充分条件, 关键是要找到共同的正定矩阵 P , 下面给出关于 P 存在的必要条件^[5,6].

定理 5 对于连续模型, 如果 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是稳定的且非奇异矩阵, 若存在一个共同的正定矩阵 P 使得对所有 i 均有 $A_i^T P + P A_i < 0$, 则对于任意 $i, j = 1, 2, \dots, m, A_i + A_j$ 一定为

稳定矩阵(即其特征值均在左半平面内).

定理 6 对于离散模型, 如果 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是稳定且非奇异矩阵, 若存在一个共同的正定矩阵 P 使得对所有 i 均有 $A_i^T P A_i - P < 0$, 则对于任意 $i, j=1, 2, \dots, m$, $A_i A_j$ 一定为稳定矩阵(即其特征值均在单位圆内).

注: 若能找到一个 $A_i A_j$ (离散) 或 $A_i + A_j$ (连续) 是不稳定的, 则说明一定不存在共同的正定矩阵 P .

如对于例 1, A_1, A_2 的特征值分别为 $-0.0098 \pm 0.9512i, 0.4822 \pm 0.8200i$. 而 $A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 0.2540 & 0.1527 \\ -1.4588 & 2.3469 \end{bmatrix}$, 特征值为 $0.3665, 2.2344$, 是不稳定的, 故不存在共同的正定矩阵 P , 同样由推论 2 也可得, 因为切换系统是不稳定的.

4 控制器设计

设所考虑的切换系统为:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(t) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (3a)$$

或

$$x(k) = \sum_{i=1}^m \omega_i(k) [A_i x(k) + B_i u(k)] \quad (3b)$$

为了使切换系统渐近稳定, 可通过设计线性状态反馈控制器

$$u(t) = K_i x(t) \quad (4a)$$

或

$$u(k) = K_i x(k) \quad (4b)$$

来实现.

把(4a)、(4b)分别代入(3a)、(3b)得

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(t) [A_i + B_i K_i] x(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(t) \tilde{A}_i x(t) \quad (5a)$$

或

$$x(k) = \sum_{i=1}^m \omega_i(k) [A_i + B_i K_i] x(k) = \sum_{i=1}^m \omega_i(k) \tilde{A}_i x(k) \quad (5b)$$

事实上, 对于(3)式, 若 $A_1 = A_2 = \dots = A_m$, 此时系统表现为多控制器切换.

由定理 3, 4 可知, 若存在一个共同的正定矩阵 P , 使得

$$\tilde{A}_i^T P + P \tilde{A}_i < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

或

$$\tilde{A}_i^T P \tilde{A}_i - P < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

也即为

$$(A_i + B_i K_i)^T P + P (A_i + B_i K_i) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6a)$$

或

$$(A_i + B_i K_i)^T P (A_i + B_i K_i) - P < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6b)$$

则系统(5)渐近稳定, 所以可得设计线性状态反馈控制器(4)的步骤为:

步骤 1 选定一正定矩阵 P ;

步骤 2 利用式(6)解得 $K_i, i=1, 2, \dots, m$

步骤 3 若有必要, 重复步骤 1、2

这样由此反馈控制器构成的闭环系统(5)是渐近稳定的切换系统. 由于(6)式是不等式, 故步骤(2)中所得的 K_i 值范围较大, 可任意选取 K_i , 也可根据其它具体限制条件来选取 K_i 的值.

下面以一个简单的例子来说明以上过程.

例 2 设连续时间切换系统为 $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 w_i(t)[A_i x(t) + B_i u(t)]$, 式中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ -10 & -0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 10 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当 $u(t) = 0$ 时, 此两独立系统是渐近稳定的, 但由文[2]可知, 当状态在相平面第二、四象限时用 A_1 , 在第一、三象限时用 A_2 构成的切换系统是发散的, 由推论 1 可知, 不存在一个共同的正定矩阵 P , 对于所有的子系统均有 $A_i^T P + P A_i < 0$, ($i = 1, 2$). 下面构造线性状态反馈控制器 $u(t) = K_i x(t)$, $i = 1, 2$, 使切换系统渐近稳定. 令 $K_1 = [k_1^1 \quad k_2^1]$, $K_2 = [k_1^2 \quad k_2^2]$, 由(6a)可得要求

$$(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) < 0 \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

若取 $P = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 把各数据代入(7)式整理后得:

$$\begin{vmatrix} 2k_1^1 - 0.2 & -9 + k_2^1 \\ -9 + k_2^1 & -0.2 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} -0.2 & 9 + k_1^2 \\ 9 + k_1^2 & -0.2 + 2k_2^2 \end{vmatrix} < 0$$

由矩阵负定定义可得:

$$K_1 \text{ 需满足: } k_1^1 < 0.1, \quad (k_2^1)^2 - 18k_2^1 + 80.96 + 0.4k_1^1 < 0,$$

$$K_2 \text{ 需满足: } (k_1^2)^2 + 18k_1^2 + 80.96 + 0.4k_2^2 < 0$$

则可取 $K_1 = [-3 \quad 10]$, $K_2 = [-10 \quad -3]$, 此时所得的闭环系统是渐近稳定的. 取切换系统为:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} [A_1 + B_1 K_1]x(t) & x_1(t) < 0 \text{ and } x_2(t) > 0 \text{ or } x_1(t) > 0 \text{ and } x_2(t) < 0 \\ [A_2 + B_2 K_2]x(t) & x_1(t) > 0 \text{ and } x_2(t) > 0 \text{ or } x_1(t) < 0 \text{ and } x_2(t) < 0 \end{cases}$$

初始值为 $(0.5, 0.5)^T$, 采样周期为 0.01, 仿真结果见图 2、3, 从图 2 可看出闭环系统是渐近稳定的, 图 3 反映了各子系统随时间的切换情况, 线 1、2 分别表示子系统 1、2 处于活动状态, 子系统 1、2 不停地切换.

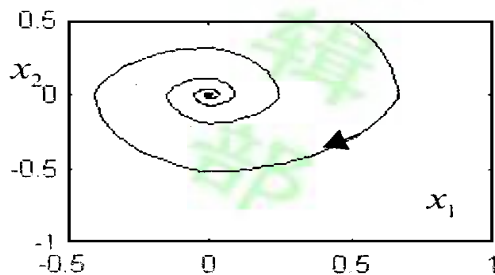


图 2 例 2 切换系统的状态轨迹

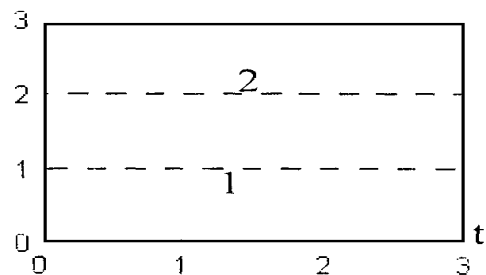


图 3 子系统的活动情况

5 小结

由于多个稳定的子系统相互切换可能造成切换系统的不稳定性, 本文给出了确保由微分方程和差分方程描述的切换系统的渐近稳定性的充分条件, 并利用此条件给出了使系统渐近稳定性的镇定控制器设计方法, 为稳定的切换系统的设计提供了可行的方法.

参 考 文 献

- 1 M A Wicks, P Peleties and R A DeCarlo. Construction of Piecewise Lyapunov Functions for Stabilizing Switched Systems. In proc of the 33rd CDC, 1994: 3492~ 3497
- 2 Michael S Branicky. Stability of Switched and Hybrid Systems. In Proc of the 33rd CDC, 1994: 3498~ 3503
- 3 Philippos Peleties, Raymond DeCarlo. Asymptotic Stability of M-switched Systems Using Lyapunov-like Functions. Proc ACC, 1679~ 1684
- 4 J Malmberg, B Bernhardsson, K J Astrom. A Stabilizing Switching Scheme for Multi Controller Systems. In proc of the 13rd IFAC, 1996: 229~ 234
- 5 孙增圻, 张再兴, 邓志东编著. 智能控制理论与技术. 北京: 清华大学出版社, 1997: 85~ 90
- 6 Kazuo Tanaka, Michio Sugeno. Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(1): 135~ 156
- 7 M. 维德雅瑟格著, 徐德民译. 非线性系统分析, 国防工业出版社, 1983: 152~ 191

STABILITY AND STABILIZING DESIGN OF M-SWITCHED SYSTEMS

ZHAI Chang-lian HE Wei WU Zhiming

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

Abstract: An m -switched system which consists of m linear systems which are individually asymptotically stable may be unstable via infinite switching. This paper investigates the asymptotic stabilization of an m -switched systems described by continuous time system or discrete time system, using Lyapunov-like functions. A sufficient condition for asymptotic stability is given. The design method of stabilizing controller is developed with it. At last an example presented shows that the method given in this paper is feasible and simple.

Keywords: switched systems, stability, controller

作者简介

翟长连(1970-), 男, 1993 于中国矿业大学数力系获学士学位, 1996 年于南京理工大学获自动控制专业硕士学位, 现为上海交通大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为混合动态系统

何 苇(1966-), 女, 博士, 现为上海交通大学自动化系讲师. 主要研究方向为离散事件动态系统、混合动态系统

吴智铭(1936-), 男, 现为上海交通大学自动化系教授, 博士生导师. 主要研究方向为离散事件动态系统、混合动态系统、智能控制与决策等