

文章编号: 1002-0411(2001)02-108-03

线性系统零极点及其分布

郭 戈¹ 王 伟² 柴天佑²

(1. 甘肃工业大学电信系 兰州 730050; 2. 东北大学自动化研究中心 沈阳 110006)

摘 要: 提出一种求解线性系统特征根的方法, 用它不但可以进行高阶多项式的因式分解, 而且能够确定线性系统全部特征根的值及其重数和分布情况, 特别是该方法对于控制系统的分析、设计和综合有着重要意义.*

关键词: 特征根; 重数; 稳定性分析; 解耦控制

中图分类号: TP13 文献标识码: B

LINEAR SYSTEM ROOTS (ZEROS) AND THEIR LOCATIONS

GUO Ge¹ WANG Wei² CHAI Tian-you²

(1. Gansu University of Technology, Lanzhou 730050; 2. Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract: A computation method is presented for extracting linear system roots (or zeros). It is applicable not only to multipliers decomposition of high order polynomials, but also to determination of the roots (zeros) and their multiplicities of a linear system. It is especially important for control system design and analysis.

Keywords: roots, multiplicity, stability analysis, decoupling control

1 引言(Introduction)

线性系统零极点的确定实际上就是求一个高次幂方程的解, 而这始终是一项十分有趣也很有意义的课题. 但不幸的是, 到目前为止人们只掌握了幂指数低于四次的方程的解法, 对于高次方程还没有找到一种系统的理论求解方法. 最近有文献提出了确定线性系统零极点的一些数值方法^[1,2], 虽然具有一定的实用价值, 但是只能用来确定特征根的大致数量及其分布, 而不能精确求出系统的全部特征根及其重数, 所以其理论价值十分有限. 为此, 作者在多年从事控制理论研究工作的基础上, 并参考现有的理论研究成果^[3,4], 提出一种简单有效的确定线性系统零极点的新方法.

2 数学基础(Basic mathematics)

将线性系统零(极)点方程写成如下高次方程

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0, \quad (a_n = 1) \quad (1)$$

假设该方程的 n 个根分别为 q_1, q_2, \dots, q_n , 则它们与方程的系数间具有如下关系:

$$a_k = \sum_{i=1}^{k+1} q_i \left\{ \sum_{j=i+1}^{k+2} q_j \cdots \left[\sum_{m=k+1}^{n-1} q_m \left(\sum_{l=m+1}^n q_l \right) \right] \right\} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \prod_{i=1}^n q_i \\ a_1 &= q_1 q_2 \cdots q_{n-1} + q_1 q_3 \cdots q_n \\ &+ q_2 q_3 \cdots q_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n q_j \end{aligned}$$

同时, 假设方程的根中共有 n_d 个不同的根, 而且它们以 L 种不同的重数出现. 用 m_i 表示第 $i=1, 2, \dots, L$ 重的大小, 且具有这一相同重数的根有 n_i 个, 则有:

$$\sum_{i=1}^L n_i m_i = n, \quad \text{以及} \quad \sum_{i=1}^L n_i = n_d$$

如果把所有具有相同重数的根的一次项的乘积所形成的多项式记为:

$$f_i(x) = \prod_{k=1}^{m_i} (x - q_{i,k}) \quad (3)$$

则有

$$f(x) = \prod_{i=1}^L [f_i(x)]^{m_i} \quad (4)$$

* 收稿日期: 2000-07-18
基金项目: 国家“九五”科技攻关项目(85-524-02-05)、甘肃工业大学博士基金(139903)和辽宁省优秀青年科研人才基金(963007)资助

可以看出, 其中的 $f_i(x)$ 能将 $f(x)$ 整除 m_i 次.

有了这些基本数学关系之后, 就可以确定高次方程的所有根及其重数了.

3 特征根及其重数的计算 (Calculation of roots and multiplicities)

为了便于求解特征根及其重数, 这里将所有不同根的一次项构成的乘积记为 $D(s)$, 即

$$D(x) = \prod_{i=1}^L f_i(x) \quad (5)$$

将其写成类似高次方程中的多项式, 可得到如下形式

$$D(x) = \sum_{k=0}^{n_d} d_k x^k \quad (6)$$

然后定义如下矩阵

$$G = [g_{ij}]_{n \times n}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

其中 $g_{ij} = \mathcal{Q}_{2n-i-j}$, \mathcal{Q}_k 代表 $\mathcal{Q}_k = \sum_{i=1}^n q_i^k$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), 可由下式计算:

$$\mathcal{Q}_k = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} a_{n-l} \mathcal{Q}_{k-l} + (-1)^{k+1} k a_{n-k} & k \leq n \\ \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} a_{n-l} \mathcal{Q}_{k-l} & k > n \end{cases} \quad (8)$$

这里有

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= n \\ \mathcal{Q}_1 &= \sum_{i=1}^n q_i = a_{n-1} \end{aligned}$$

在上述矩阵 G 的基础上, 计算它的右下角各阶子矩阵的行列式 $\det(G_k)$, ($k = 1, 2, \dots$), G_k 表示矩阵 G 右下角对角线上的 k 阶子矩阵. 如果找到一个 N 满足下列关系

$$\begin{cases} \det(G_k) \neq 0 & k = N \\ \det(G_k) = 0 & k > N \end{cases} \quad (9)$$

则 N 便是方程不同根的个数, 即 $n_d = N$.

接下来确定多项式 $D(x)$, 为此首先定义如下的一组矩阵

$$\bar{G}_b = [\bar{g}_{ij}]_{n_d \times n_d} \quad (10)$$

矩阵 \bar{G}_b 随 b 的不同而不同, 这里

$$\bar{g}_{ij} = \begin{cases} \mathcal{Q}_{n_d-i-j+1} & i \leq b \\ g_{ij} = \mathcal{Q}_{n_d-i-j} & i > b \end{cases} \quad (b = 1, 2, \dots, n_d) \quad (11)$$

然后计算

$$d_{n_d-b} = \frac{\det(\bar{G}_b)}{\det(G_{n_d})} \quad (12)$$

于是可得到 $D(x) = \sum_{k=1}^{n_d} d_k x^k$.

然后就可根据多项式除法, 得到 $D(x)$ 整除 $f(x)$ 的次数 p_1 , 这便得到了重数 m_1 的大小. 此时记

$$f^1(x) = \frac{f(x)}{D^{m_1}(x)} \quad (13)$$

即对 $f(x)$ 进行降阶一次, 然后对 $f^1(x)$ 重复进行上述运算, 就会得到 $f^1(x)$ 所对应的 $D_1(x)$ 及 p_2 . 如此反复进行, 就可得到方程根的全部重数

$$m_1 = p_1$$

$$m_2 = m_1 + p_2$$

...

$$m_k = m_{k-1} + p_k$$

同时得到与同一重数相对应的不同根所构成的多项式

$$f_1(x) = \frac{D(x)}{D_1(x)}$$

...

$$f_k(x) = \frac{D_{k-1}(x)}{D_k(x)}, \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

且由于 $D_L(x) = 1$, 所以

$$f_L(x) = D_{L-1}(x)$$

从这些多项式中很容易求出高次方程的全部根, 其重数前面已经得到. 至此, 就完成了高次方程的全部根及其重数的求解.

4 对于控制理论的贡献 (Contribution to control theory)

在控制工程领域中研究系统的特性时, 人们需要知道系统零点和极点的分布, 尤其是闭环系统特征根的性质及其分布, 从而对系统的稳定性等动态和静态特性进行分析. 不管是开环系统零极点还是闭环系统特征方程的根, 它们实际上都是高次方程的求解问题. 目前已有许多稳定性判据 (如劳斯判据, 霍维茨判据等) 可以用来判断闭环系统特征根是否全在复平面原点左侧, 但至今还没有一种方法能够有效地用来分析或计算系统特征值的大小及其在整个复平面内的分布. 而在两个开环系统的零极点都已知的情况下, 如何求出它们所形成的串联、并联及反馈系统的零极点, 进而对复合系统的特性做出准确的判断和预测, 目前也仍然没有系统的理论方法, 这也是一个十分重要的研究课题. 另外, 在以状态空间方程描述系统的情况下, 我们经常通过非奇异变换, 将系统化为对角规范形 (没有重根时) 或约旦规范形 (有重根时), 这样就可实现系统中各个状态变量之间的完全或部分解耦, 也使得对系统的特

性分析和综合设计更为直观和简单. 这里, 不管是对角规范形还是约旦规范形, 其系统矩阵都与系统闭环特征根直接相关. 除此之外, 系统可控性和可观性也与系统特征根有关, 而且如果已知线性系统特征方程根的大小和分布情况, 还可以很方便地计算出线性系统的状态转移矩阵.

总之, 确定系统特征根的大小及其分布是控制领域中一项很重要的课题, 本文提出的线性系统零极点及其重数的计算方法对于控制系统的分析和综合是十分有意义的.

5 算例(Examples)

以线性控制系统分析为例, 设其传递函数的分子或分母为如下高次多项式

$$F(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

该系统中 $n=3$, 且不难看出

$$F(s) = (s+1)^2(s+2)$$

为了便于采用本文的方法求解该系统的零(极点), 将上述方程写为

$$F(s) = -(-s)^3 + 4s^2 - 5(-s) + 2$$

利用(9)式算得该方程具有两个不同的根, 即 $n_a=2$. 然后由(12)式可得到多项式 $D(s)$ 的系数为 $d_0=1$ 、 $d_1=-3$ 及 $d_2=2$, 将其也写为

$$D(s) = s^2 - 3(-s) + 2$$

然后算得

$$\frac{F(s)}{D(s)} = s + 1$$

可见 $F(s)$ 可以被 $D(s)$ 整除一次, 即 $m_1=1$. 然后对

$F'(s) = \frac{F(s)}{D(s)} = (s+1)$ 同样进行上述运算, 可得到 $D_1(s) = s+1$ 和 $m_2=2$, 从而有

$$F_1(s) = \frac{D(s)}{D_1(s)} = (s+2),$$

$$F_2(s) = D_1(s) = s+1$$

即 $F(s)$ 可分解为

$$F(s) = F_1^{m_1}(s)F_2^{m_2}(s) = (s+2)(s+1)^2$$

所以原系统的零点(或极点)为两重的 $s=-1$ 和一重的 $s=-2$.

这里再给出一个例子. 对于系统

$$F(s) = s^5 - s^4 - 5s^3 + s^2 + 8s + 4$$

按照与上一例中相同的方法可得到

$$F_1(s) = \frac{D(s)}{D_1(s)} = (s-2), m_1=2$$

$$F_2(s) = D_1(s) = (s+1), m_2=3$$

于是

$$F(s) = F_1^{m_1}(s)F_2^{m_2}(s) = (s-2)^2(s+1)^3$$

即该系统的五个根(零点或极点)分别为三重的 $s=-1$ 和两重的 $s=-2$.

上面的两个例子只给出了方程有实根的情况, 实际上对于有复数根的情况同样适用. 所以本文的方法对于确定高阶系统的零极点特别有效, 而且十分方便可靠, 计算程序见附录.(略)

6 结论(Conclusions)

实际上, 对于一个高阶系统, 重数相同的特征根一般不会超过三个, 所以所有重数相同的根的一次项乘积形成的多项式一般都是不超过三阶的多项式, 可根据现有的理论对其进行分解, 得到的不是三个实根便是两个互逆的复数根和一个实根. 用本文的方法分解后, 如果某个对应于同一重数的所有根的一次项乘积所形成的多项式是四阶或更高阶的, 即它是由三个以上不同的根所构成, 可以进而采用文献[5]的方法求得它的全部根. 与本文的方法相比, 文献[1]中的方法只能确定出特征根的大致数目和分布情况, 而且使用起来十分不便.

总之, 本文的方法不但可以对高次多项式进行因式分解, 而且能够有效地解出高次方程的全部特征根及其重数, 同时还能够确定方程的根在左右平面的个数及其具体位置. 它不但为解决高次方程求解这一困扰人们多年的数学难题提供了非常有意义的思路, 而且由于这种方法能够确定控制系统的全部零极点及其在复平面内的分布, 所以它为控制系统设计和分析系统稳定性等动态和静态特性及相关运算提供了十分有效的理论指导.

参考文献(References)

- 1 冯纯伯. 线性系统特征值的计算及其分布. 中国科学, E 辑, 1998, 28(5): 425~430
- 2 冯纯伯, 王海风. 线性多变量系统的稳定判据. 中国科学, A 辑, 1987, 17(7): 771~778
- 3 M L James, G M Smith, J C Wolford. Applied Numerical Methods for Digital Computation, Harper Collins, New York, 1993
- 4 杨路, 侯晓荣, 曾振柄. 多项式的完全判别系统. 中国科学, E 辑, 1996, 26(10): 424~441
- 5 L Gaal. Classical Galois Theory, Chelsea, New York, 1988

作者简介

郭戈(1972-), 男, 博士, 副教授. 研究领域为复杂工业过程的建模与控制、智能化系统和智能控制理论与应用等.

王伟(1955-), 男, 博士生导师. 研究领域为复杂系统建模与控制、自适应控制理论与应用、预测控制等.

柴天佑(1947-), 男, 博士生导师. 研究领域为自适应控制、复杂工业过程的建模、控制与优化等.