

文章编号: 1002-0411(2000)05-0431-06

# 基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制

张泉灵 王树青

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)

摘要: 本文提出了基于 ARMAX 模型的自适应预测函数控制, 该算法的特点是占用内存少, 计算速度快, 并具有较强的鲁棒性. ARMAX 模型参数是通过带遗忘因子的递推最小二乘算法在线辨识得到. 仿真结果表明, 该控制算法比 PID 控制具有更好的控制品质.\*

关键词: ARMAX 模型, 模型预测控制, 预测函数控制, 自适应控制

中图分类号: TP13

文献标识码: B

## 1 引言

Richalet 和 Culter 等人在 70 年代后期提出的基于模型的预测控制经过 20 多年的发展, 在工业过程控制中得到了广泛的成功应用. 到目前为止, 已有以下几类典型的模型预测控制算法: Richalet 等人提出的基于有限脉冲响应(FIR)模型的模型预测启发控制(MPHC)<sup>[1]</sup>, 并在 PVC 生产、蒸馏过程及电厂里得到了较好的应用; Culter<sup>[2]</sup>等人提出的基于有限阶跃响应(FSR)模型的动态矩阵控制(DMC); Garcia 和 Morari<sup>[3]</sup>提出的内模控制; Clarke<sup>[4,5]</sup>等人提出的基于受控自回归积分滑动平均模型(CARIMA)的广义预测控制(GPC), GPC 带有自校正机制, 可在线修正模型参数; 在 80 年代后期, Richalet<sup>[6]</sup>等人提出了第三代模型预测控制算法, 即预测函数控制(PFC), 并在工业机器人的快速高精度跟踪控制中得到了成功的应用. 与其它模型预测控制不同, PFC 认为控制输入的结构是确保控制系统性能的关键.

由于实际生产过程的数学模型往往难以确知或者由于工作情况改变或环境变化而造成被控对象特性的改变. 对于这类对象, 常规控制往往难以对付, 而自适应控制却能较好地解决这个问题.

本文提出了基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制, 它结合了自适应控制可在线修改模型参数和预测函数控制快速跟踪能力的优点, 仿真结果表明, 该控制算法比 PID 控制具有较快的跟踪能力及较强的鲁棒性.

## 2 基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制

PFC 仍属于模型预测控制的范畴, 因此它仍具有模型预测控制的三大特征: 预测模型; 滚动优化; 误差校正.

预测模型用来预测过程的未来输出, PFC 对模型没有特殊的要求, 它可以是任意结构. 本文采用的是 ARMAX 模型.

### 2.1 ARMAX 模型

被控对象用 ARMAX 模型来描述, 如式(1)所示:

\* 收稿日期: 1999-09-22  
基金项目: 浙江省重点科研项目资助

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (1)$$

其中:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}$$

$$B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}$$

其中  $\xi(k)$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声.

## 2.2 预测函数控制

### 2.2.1 输出预测

预测函数控制的模型预测输出  $y_m(k)$  由两部分组成, 一部分为模型自由响应  $y_l(k)$ , 它仅仅依赖于过去时刻的控制量及输出量, 与当前时刻及将来的控制量无关. 另一部分为模型的受迫输出  $y_f(k)$ , 它是当前时刻起加入控制作用后新增加的模型响应. 与其它模型预测控制不同, 预测函数控制认为控制输入的结构是确保控制性能的关键. 在预测函数控制中, 控制作用认为是若干个已知基函数  $u_{bn}$  的线性组合, 即:

$$u = (k+i) = \sum_{n=1}^N \mu_n u_{bn}(i), \quad i = 0, 1, \dots, H-1 \quad (2)$$

其中  $N$  是基函数个数,  $u_{bn}(i)$  为基函数在  $t = iT_s$  时的值,  $T_s$  为采样周期,  $H$  为优化时域的长度,  $\mu_n$  为线性组合系数. 其中基函数的选择取决于设定值的性质, 通常采用多项式基函数的形式, 当设定值在被控区间里其变化率小于或等于某一值时, 控制输入的结构可以取一个基函数, 当设定值在被控区间里其变化率大于某一值时, 控制输入的结构可以取两个基函数. 由上分析有:

$$y_m(k) = y_l(k) + y_f(k) \quad (3)$$

由于  $\xi(k)$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声, 且不可测量. 在推导模型的预测输出时可以设  $\xi(k) = 0$ , 根据式(1)模型最合适的预测输出为:

$$y_m(k) = \sum_{i=1}^{n_a} (-a_i) y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_b} b_j u(k-j) \quad (4)$$

为了在  $k$  时刻预测得到  $k+i$  时刻 ( $i = 1, 2, \dots, H$ ) 的模型输出值, 可根据式(3), (4) 推导出:

$$y_l(k+i|k) = \sum_{j=1}^{n_a} (-a_j) y_m^0(k+i-j) + \sum_{j=1}^{n_b} b_j u^0(k+i-j) \quad i = 1, 2, \dots, H \quad (5)$$

其中:

$$y_m^0(k+i-j) = \begin{cases} y_m(k+i-j), & i < j+1 \\ y_l(k+i-j), & i \geq j+1 \end{cases}$$

$$u^0(k+i-j) = \begin{cases} u(k+i-j), & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases}$$

$$y_f(k+i|k) = \sum_{j=1}^i c_j u(k+i-j) \quad i = 1, 2, \dots, H \quad (6)$$

其中:

$$\begin{cases} c_1 = b_1 \\ c_j = \sum_{k=1}^{\min(j-1, n_a)} (-a_k) c_{j-k} + b_j, & 2 \leq j \leq n_b \\ c_j = \sum_{k=1}^{\min(j-1, n_a)} (-a_k) c_{j-k}, & n_b < j \leq H \end{cases} \quad (7)$$

当取一个基函数时, 基函数可以取阶跃函数, 即:  $u(k+i) = u(k) = \mu_1, i = 0, 1, \dots, H-1$ ; 当取两个基函数时, 基函数可以取阶跃函数和斜坡函数, 即:  $u(k+i) = \mu_1 + i \mu_2, i = 0, 1, \dots, H-1$ .

### 2.2.2 滚动优化

预测函数控制的参考轨迹可以采用各种形式. 对于一个稳定的系统, 通常采用一阶指数形式, 如式(8)所示:

$$y_r(k+i) = c(k+i) - \lambda^i(c(k) - y(k)) \quad (8)$$

式中  $y_r$  是参考轨迹;  $c$  是设定值;  $\lambda = e^{(-T_s/T_r)}$ ,  $T_r$  是 95% 的参考轨迹响应时间;  $y(k)$  为  $k$  时刻的过程输出.

预测函数控制的优化算法中, 未来控制作用是通过迭代, 最优化, 约束限制等一系列步骤来实现的. 最常用的方法是在优化点上参考轨迹和过程预测输出的误差平方和最小化. 其最小化的标准式如式(9)所示:

$$\min J_p = \sum_{i=1}^H (y_r(k+i) - \tilde{y}(k+i))^2 \quad (9)$$

$$\tilde{y}(k+i) = y_m(k+i|k) + e(k+i) \quad (10)$$

式中  $\tilde{y}(k+i)$  为预测过程输出;  $y_m(k+i|k)$  是  $k+i$  时刻的模型输出;  $e(k+i)$  是未来误差.

### 2.2.3 误差校正

实际情况下, 由于模型失配, 二次输入及噪声的影响, 模型输出与过程输出之间常存在着误差. 为此, 需要对未来优化时域中的误差进行预测, 预测的方法有多种, 其中可以取未来的误差为:

$$e(k+i) = y(k) - y_m(k) \quad (11)$$

其中  $y_m(k)$  为  $k$  时刻的模型输出.

## 2.3 模型参数的在线辨识

参数辨识方法必须假定一种模型结构, 通过极小化模型与过程之间的误差准则函数来确定模型的参数. 本文考虑式(1)结构的模型, 通过极小化广义误差和函数来确定模型的参数, 即最小二乘类参数辨识法. 随着数据的增加, 最小二乘法将出现所谓的“数据饱和”现象. 这是由于增益矩阵  $K(k)$  随着  $k$  的增加将逐渐趋近于零, 以致递推算法慢慢失去修正能力之故. 考虑到需要在线辨识模型参数, 为了克服“数据饱和”现象, 我们采用带遗忘因子的递推最小二乘算法. 针对式(1), 且  $C(z^{-1}) = 1$  的情况下具体算法如下:

$$\text{设 } \mathbf{h}(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b)]^T \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T \quad (13)$$

初始条件:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0) = a^2 \mathbf{I}, a \text{ 是充分大的常数, } \mathbf{I} \text{ 是 } (n_a + n_b) \times (n_a + n_b) \text{ 的单位矩阵} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon} \text{ 是充分小的实向量} \end{cases} \quad (14)$$

带遗忘因子法的递推最小二乘算法:

$$\begin{cases} \mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k-1)\mathbf{h}(k)[\mathbf{h}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{h}(k) + \mu]^{-1} \\ \mathbf{P}(k) = \frac{1}{\mu}[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{h}^T(k)]\mathbf{P}(k-1) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[y(k) - \mathbf{h}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \end{cases} \quad (15)$$

$\mu$  是接近于 1 的正数, 如果过程是线性的, 应选  $0.95 \leq \mu \leq 1$ . 当  $\mu = 1$  时, 就是普通的最小二乘法.

## 2.4 自适应预测函数控制算法

基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制系统的结构框图如图 1 所示.

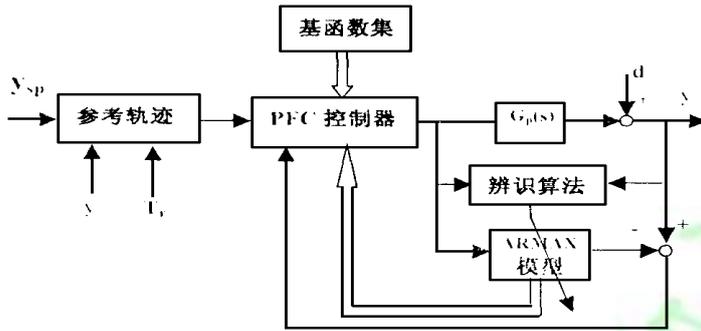


图 1 自适应预测函数控制系统方框图

具体算法如下:

(1) 算法初始化, 给定模型辨识的遗忘因子  $\mu$ , 正定矩阵  $P(0)$ , 参数的初始值  $\hat{\theta}(0)$ , 控制量的初值  $u(0)$ , 给定预测函数控制中的相关参数, 如  $T_r, T_s, H$  等, 并计算  $\lambda$ ;

(2) 读入  $k$  时刻的过程输出值  $y(k)$ , 及  $k$  时刻和  $k+H$  时刻的设定值;

(3) 根据式(15)在线估计

模型参数, 得到  $A(z^{-1}), B(z^{-1})$ ;

(4) 根据式(7)计算  $c_j, j = 1, 2, \dots, H$ ;

(5) 根据式(3), (5), (6) 计算得到  $k+i$  时刻 ( $i = 1, 2, \dots, H$ ) 的模型预测值;

(6) 根据式(8)计算得到  $k+i$  时刻 ( $i = 1, 2, \dots, H$ ) 参考轨迹值;

(7) 如果  $k \leq 10$  那么转(8) 否则转(9);

(8) 令  $u(k) = u(0)$ , 转(10);

(9) 根据式(9), 优化得到  $k$  时刻的控制量  $u(k)$ , 转(10);

(10) 计算  $y_m(k+1)$ , 执行  $u(k)$ ;

(11) 令  $k = k+1$ , 返回到(2).

## 3 仿真研究

表 1 被控对象的传递函数

序号	采样区间	被控对象
1	1- 79	$\frac{1}{(8s+1)(5s+1)}$
2	80- 299	$\frac{1}{30s+1}$
3	300- 400	$\frac{1}{(10s+1)(6s+1)}$

为了验证算法的有效性, 被控对象由表 1 中给出的 3 个不同传递函数组成, 采样周期为 1 秒. 输出  $y(t)$  的设定值分别为幅值为 0、10、20 的周期方波, 仿真中采用带遗忘因子的递推最小二乘法在线辨识模型的参数, 取遗忘因子为 0.96, 参数估计初值为 0- 0.01 之间的随机数, 在每一次仿真中的前 10 次采样时刻, 控制量  $u(t)$  固定为 10, 即算法中  $u(0) = 10$ , 以便使参数在线辨识算法投入运行. 图 2 是固定参数的 PID 控制效果图, PID 参数是根据第一个传递函

数的参数而进行整定的. 从图中可以看出对于第 1 个和第 3 个传递函数具有较好的控制效果, 而对于第二个传递函数却无法控制好. 图 3 是基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制效果图. 从图中可以看出该算法对 3 个传递函数均取得了满意的控制效果. 由此可见, 基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制明显地优于常规的 PID 控制.

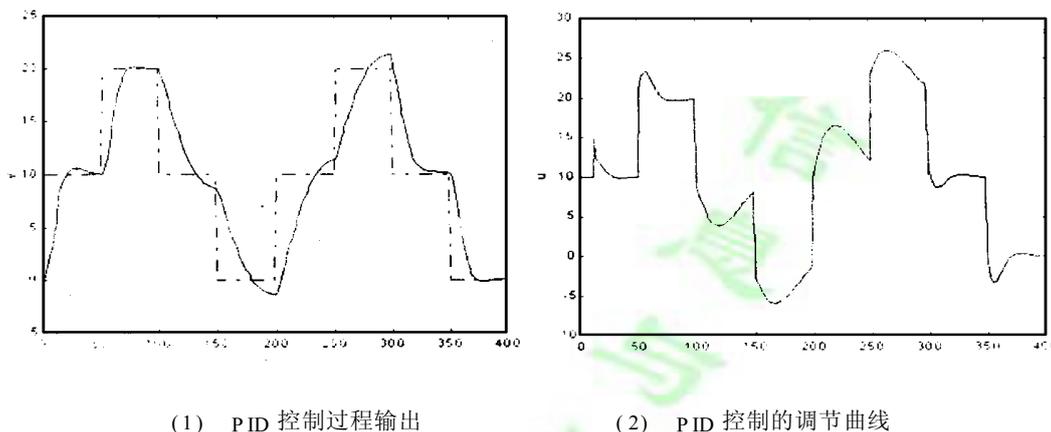


图 2 基于表 1 被控对象的 PID 控制结果图

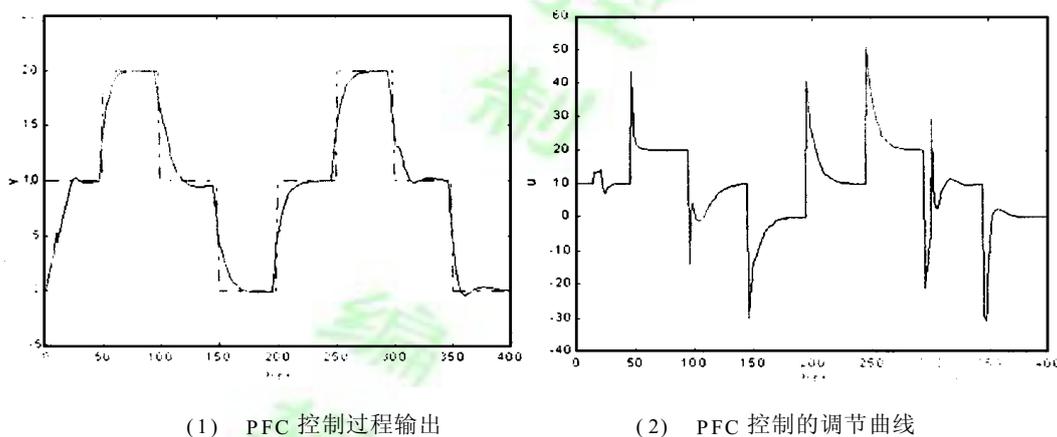


图 3 基于表 1 被控对象的 PFC 控制结果图

## 4 结论

本文提出的基于 ARMAX 模型的自适应预测函数控制, 模型参数是通过带遗忘因子递推最小二乘在线辨识得到, 尽管参数需要在线辨识, 但其在线计算量较小. 另外, 过程的预测输出是通过 ARMAX 模型直接计算得到, 而不用解 Diophantine(丢番图)方程. 以上特点决定了该控制算法占用计算机内存少, 速度快. 计算机仿真表明, 该算法具有良好的控制效果, 比 PID 控制有效.

## 参 考 文 献

- 1 Richalet J, Rault A, Testud J L, Papon J. Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes, *Automatic*, 1978, 14: 413~ 428

- 2 Culter C R, Ramaker BL. Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm, Proc. JACC, San Francisco, WP5 - B 1980
- 3 Garcia C E, Morari M. Internal Model Control - A Unifying Review and Some New Results., Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 1982, **21**: 308~ 323
- 4 Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized Predictive Control-Part 1. Basic Algorithm, Automatica, 1987, **23**(2): 137~ 148
- 5 Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized Predictive Control-Part 2. Extensions and Interpretations, Automatica, 1987, **23**(2): 149~ 160
- 6 Richalet J, Doss S A A, Arber C, Kuntze H B, Jacobasch A, Schill W. Predictive Functional Control: Applications to Fast and Accurate Robots, In: Ise mann R. ed. Automatic Control Tenth Triennial World Congress of IFAC V. 4, Oxford: Pergamon Press, 1988: 251~ 258
- 7 冯纯伯, 史 维. 自适应控制. 电子工业出版社, 1986
- 8 方崇智, 萧德云. 过程辨识. 清华大学出版社, 1988
- 9 张泉灵, 楼史进, 刘峙飞, 王树青. 预测函数控制及其应用. 化工自动化及仪表, 1998, **25**(增刊): 40~ 43
- 10 顾钟文, 邹志云, 罗文巍. 一类非线性系统的预测控制算法. 中国自动化学会首届过程控制科学报告会论文集, 浙江大学出版社, 1987
- 11 王 伟. 广义预测控制理论及其应用. 科学出版社, 1998
- 12 席裕庚. 预测控制. 国防出版社, 1993
- 13 金晓明. 模糊控制、预测控制与工业过程的先进控制. 浙江大学博士学位论文, 1998

## ADAPTIVE PREDICTIVE FUNCTION CONTROL USING ARMAX MODELS

ZHANG Quan-ling WANG Shu-qing

(State Key Lab of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract:** An adaptive predictive function control strategy using ARMAX models has been developed. The characteristic features of this strategy are the small computer memory requirement, high computational speed, robust. The parameters of ARMAX model are identified by the recursive least square method with exponential forgetting. The simulation results show that the control strategy is more effective than PID control.

**Keywords:** ARMAX models, model based predictive control, predictive functional control, adaptive control

### 作者简介

张泉灵(1973- ), 博士, 讲师. 研究领域为预测控制, 工业过程的建模、先进控制与优化.

王树青(1939- ), 教授, 博士生导师. 研究领域为工业过程的建模、先进控制与优化, 预测控制, 非线性控制, 智能控制, 统计过程控制, CIMS 等.