求解社会经济系统控制问题的分解协调-二次规划算法

刘　豹　　张世英　　杨　楹

（天津大学系统工程研究所）

提要　本文讨论了社会经济系统控制问题具有的几个特点，在此基础上，给出了一种社会经济系统控制问题的提法，并针对这种类型的问题，提出了一个求解的分解协调-二次规划算法。

1　社会经济系统控制问题的几个特点

1.1　滞后问题

对于表征社会经济系统特征的许多变量（总产值、国民收入、积累额、消费额、投资额，……）来说，时间延迟作用的影响比较明显，就经济系统而言，某一年经济状况的好坏往往要影响到以后若干年的发展变化，这一年的某些经济指标又是过去几年各种因素综合作用的结果。这样一个过程可以用下面的动态模型加以描述

$$x(k)=\sum_{j=0}^{s}A_{kj}x(k-j-1)+\sum_{j=0}^{r}B_{kj}\cdot u(k-j)+B_k \qquad (1)$$

$x(k)$ 是状态向量，$u(k)$ 是控制向量，A_{kj}，B_{kj} 分别是状态向量和控制向量的系数矩阵，B_k是常数向量。

于是，在动态模型中出现了滞后的状态变量和控制变量，这对于运用某些最优控制的计算方法去求解最优控制问题，带来了许多困难。所以，用（1）式描述的社会经济系统，在进行最优控制的分析时，滞后因素是应该给予注意的一个问题。

1.2　约束问题

在对由（1）式描述的社会经济系统进行最优控制分析时，应该考虑实际部门的一些设想和建议，对状态变量和控制变量提出约束条件要求，否则，分析计算的结果难于在实际工作中运用。这些约束条件可能是对控制拍节的终端单独提出的，也可能是对每一个控制拍节提出的；可能是等式的，也可能是不等式的，或二者兼而有之；可能是对单一状态变量和控制变量提出的带有上、下界限制的饱和型约束，也可能是对关于状态变量和控制变量的一个解析表达式提出的约束。特别地，在分析经济活动时，逐年发展速度是一个重要的概念，实际中的很多约束条件都是针对这个指标提出的。这种约束条件会使两个不同时刻的状态变量和控制变量出现在同一个不等式约束表达式里面。带有这种约束条件的最优控制问题，尤其是当滞后问题与约束问题同时提出来时，会使求解计算变得很复杂。

1.3　目标函数的形式

与（1）式所描述的社会经济系统的动态特性相适应，更一般形式的二次型目标函数为

$$J=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}[x^T(k)\ \ u^T(k)]Q(k)[x^T(k)\ \ u^T(k)]^T \qquad (2)$$

$Q(k)$ 为对称正定矩阵或对角线元素为正数的非负矩阵。

2　社会经济系统控制问题的一种提法

不同的分析对象和目的，社会经济系统控制问题的提法多种多样。总结上面所述的社会经济系统控制问题的特点，用下面的形式提出一种社会经济系统控制问题。

系统方程

$$x(k)=\sum_{j=0}^{s}A_{kj}x(k-j-1)+\sum_{j=0}^{r}B_{kj}\cdot u(k-j)+B_k \qquad (1)$$

收到本文的时间是1986年7月3日。

$x(k)\in R^n$，$u(k)\in R^m$，$A_{kj}\in R^{n\times n}$，$B_{kj}\in R^{n\times m}$，$B_k\in R^n$，$k=1,2,\cdots,N$，$x(0)$，$x(-1)$，$\cdots$，$x(-s)$，$u(0)$，$u(-1)$，$\cdots$，$u(1-r)$为已知。

目标函数

$$J=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}[x^T(k)\ \ u^T(k)]Q(k)[x^T(k)\ \ u^T(k)]^T \tag{2}$$

$Q(k)\in R^{(n+m)\times(n+m)}$ 为对称正定矩阵或者是对角线元素为正数的非负矩阵。

线性等式约束

$$C(k)x(k)+D(k)u(k)+E(k)=0 \tag{3}$$

$C(k)\in R^{l_k\times n}$，$D(k)\in R^{l_k\times m}$，$E(k)\in R^{l_k}$，l_k为在第k时刻的线性等式约束方程个数，$k=1,2,\cdots,N$。

线性不等式约束

$$F_2(k)x(k)+G_2(k)u(k)+F_1(k)x(k-1)+G_1(k)u(k-1)+T(k)\geqslant 0 \tag{4}$$

$$x(k)\geqslant 0,\ u(k)\geqslant 0 \tag{5}$$

$F_i(k)\in R^{p_k\times n}$，$G_i(k)\in R^{p_k\times m}$，$T(k)\in R^{p_k}$，$i=1,2$，$p_k$为在第k时刻的线性不等式约束方程个数，$k=1,2,\cdots,N$。

要解出最优控制向量序列$u^*(1)$，$u^*(2)$，$\cdots$，$u^*(N)$，在满足系统方程、线性等式和线性不等式约束条件以及状态变量和控制变量非负的条件下，使目标函数J取最小值。

在线性等式约束中，没有象线性不等式约束那样，考虑两个不同时刻上的变量之间的关系，因为这个情况比较少见。如果实际问题中出现有这种情况，可以很方便地对后面的推导过程做推广处理得到新的结果。

3 分解协调-二次规划算法

问题如上面所述。

定义一个对偶函数 $\phi(\lambda_1,\lambda_2)$：

在满足状态变量和控制变量的初始条件以及线性不等式约束条件下，取

$$\phi(\lambda_1,\lambda_2)=\min_{x,u} L(x,u,\lambda_1,\lambda_2) \tag{6}$$

式中：

$$L(x,u,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}[x^T(k)\ \ u^T(k)]\cdot Q(k)[x^T(k)\ \ u^T(k)]^T+\sum_{k=1}^{N}\lambda_1^T(k)\cdot\Big[\sum_{j=0}^{s}A_{kj}x(k-j-1)+\sum_{j=0}^{r}B_{kj}u(k-j)+B_k-x(k)\Big]+\sum_{k=1}^{N}\lambda_2^T(k)[C(k)x(k)+D(k)u(k)+E(k)] \tag{7}$$

称$L(x,u,\lambda_1,\lambda_2)$为拉格朗日算子，$\lambda_1(k)$和$\lambda_2(k)$（$k=1,2,\cdots,N$）为拉格朗日乘子向量序列。

根据强拉格朗日对偶原理，如果全部约束条件是凸的（我们上面提出的问题恰好满足这一点），则

$$\min J=\max_{\lambda_1\lambda_2}\phi(\lambda_1,\lambda_2) \tag{8}$$

即 在满足系统方程（1）、初始条件、线性等式约束（3）以及线性不等式约束（4）和（5）下面求目标函数J的极小值，等效于对λ_1，λ_2求对偶函数中$\phi(\lambda_1,\lambda_2)$的极大值。

定义子拉格朗日算子L_k

$$L_k=\frac{1}{2}[x^T(k)\ \ u^T(k)]Q(k)[x^T(k)\ \ u^T(k)]^T+\Big[-\lambda_1^T(k)\ x(k)+\sum_{j=0}^{s}\lambda_1^T(k+j+1)A_{k+j+1,j}x(k)+\sum_{j=0}^{r}\lambda_1^T(k+j)\cdot B_{k+j,j}u(k)+\lambda_1^T(k)B_k\Big]+\lambda_2^T(k)[C(k)\cdot x(k)+D(k)u(k)+E(k)] \tag{9}$$

$k=1,2,\cdots,N$；$A_{i,j}=0$，$B_{i,j}=0$，$\lambda(i)=0$，当 $i>N$。

于是，拉格朗日算子 $L(x,u,\lambda_1,\lambda_2)$ 可以写成

$$L(x,u,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=1}^{N}L_k+L_0 \tag{10}$$

$$L_0=\sum_{i=0}^{s}\lambda_1^T(i+1)\sum_{j=1}^{s-i+1}A_{i+1,i+j-1}\cdot x(1-j)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_1^T(i)\sum_{j=1}^{r-i+1}B_{i,i+j-1}\cdot u(1-j) \tag{11}$$

在 L_0 的表达式里，滞后状态变量和控制

变量的初始值是已知的，当$\lambda_1(k)$为确定的时候，L_0是一个常数。

至此，我们把拉格朗日算子$L(x,u,\lambda_1,\lambda_2)$按照时间分解成了$N$个独立的子拉格朗日算子$L_k$。对于给定的$\lambda_1^*(k)$和$\lambda_2^*(k)$，在初始条件和线性不等式约束（4），（5）下面求解拉格朗日算子$L(x,u,\lambda_1^*,\lambda_2^*)$的极小值问题，就可以转为对$N$个子拉格朗日算子$L_k$独立地求极小值。这$N$个子问题是形如下式的二次规划（Quadratic Programming）问题

$$\min:\ L_k-[\lambda_1^T(k)B_k+\lambda_2^T(k)E_k] \quad (12)$$

$$s.t.:\ F_{2,k}x(k)+G_{2,k}u(k)+F_{1,k}\cdot x(k-1)+G_{1,k}u(k-1)+T_k\geqslant 0 \quad (4)$$

$$x(k)\geqslant 0,\ u(k)\geqslant 0 \quad (5)$$

$$k=1,2,\cdots,N。$$

因为前面已经要求$Q(k)$为对称正定矩阵或对角线元素为正数的非负矩阵，所以可以把上面的问题转化成线性互补问题，用Lemke算法求解。可以证明，只要可行域非空，采用Lemke算法求解上述二次规划问题，必能收敛到其最优解。尽管线性不等式约束（4）中包含有两个时间点上的变量，但是只要从$k=1$开始求解问题，滞后的状态变量和控制变量总是可以作为已知条件对待。

对偶函数$\phi(\lambda_1,\lambda_2)$关于拉格朗日乘子向量序列$\lambda_1(k)$和$\lambda_2(k)$的梯度是一个简单的解析表达式

$$\nabla\phi_k(\lambda_1,\lambda_2)|_{\lambda_1^*\lambda_2^*}=\sum_{j=0}^{s}A_{kj}x(k-j-1)+\sum_{j=0}^{r}B_{kj}u(k-j)+B_k-x(k) \quad (13)$$

$$\nabla\phi_{k+N}(\lambda_1,\lambda_2)|_{\lambda_1^*\lambda_2^*}=C(k)x(k)+D(k)u(k)+E(k) \quad (14)$$

$$k=1,2,\cdots,N。$$

前N个梯度向量是关于$\lambda_1(k)$的，后面N个梯度向量是关于$\lambda_2(k)$的。求解二次规划问题得到N个子问题的最优解$x^*(1),\cdots,x^*(N)$，$u^*(1),\cdots,u^*(N)$后，便可应用梯度形式的算法改进拉格朗日乘子向量序列$\lambda_1(k)$和$\lambda_2(k)$。当梯度向量序列的范数都接近于零时，认为这时的状态向量序列和控制向量序列就是要得到的最优值。

通过上面对算法的说明，可以看出我们解决前面提出的那种社会经济系统控制问题的方法。通过把拉格朗日算子$L(x,u,\lambda_1,\lambda_2)$分解成$N$个子拉格朗日算子$L_k$，解决了滞后问题和等式约束问题，涉及两个时间点上的变量的不等式约束问题是利用求解二次规划的方法解决的。这个算法是最优控制、大系统理论和最优化技术三种方法的一个综合：描述系统动态特性和提出问题的方式与最优控制中的作法相似；计算过程采用了大系统理论中的田村坦之的分解协调-三级算法的思想；用二次规划的静态优化技术实施主要计算，由对偶原理和二次规划的Lemke算法为收敛解的最优性提供保证。计算过程是：把设定的拉格朗日乘子向量序列$\lambda_1(k)$和$\lambda_2(k)$代入N个子问题中，求解二次规划，得到各个时间点上的静态最优解；利用这些解求出关于拉格朗日乘子向量序列的梯度，用这个梯度修改$\lambda_1(k)$和$\lambda_2(k)$，再代入N个子问题中重新进行优化，直至全部梯度向量的范数都小于某个给定的数为止。

该算法的计算框图如图1。

4 计算实例

下面以一个污染治理的最优控制问题为例来说明我们前面提出的算法。

描述地区环境系统的一个简单模型如下：

$$w_1(k+1)=w_1(k)-0.12u_1(k+1)-0.15u_1(k)-0.03u_1(k-1)+0.5 \quad (15)$$

$$w_2(k+1)=w_2(k)-0.2u_2(k+1)-0.16u_2(k)-0.04u_2(k-1)+1.4 \quad (16)$$

$$x_1(k+1)=3.5w_1(k+1)+0.4w_2(k+1)+0.08x_1(k)-u_3(k)+1.6 \quad (17)$$

$$x_2(k+1)=0.1w_1(k+1)+0.7w_2(k+1)+0.15x_2(k)-u_3(k)-0.1u_3(k-1)-0.14 \quad (18)$$

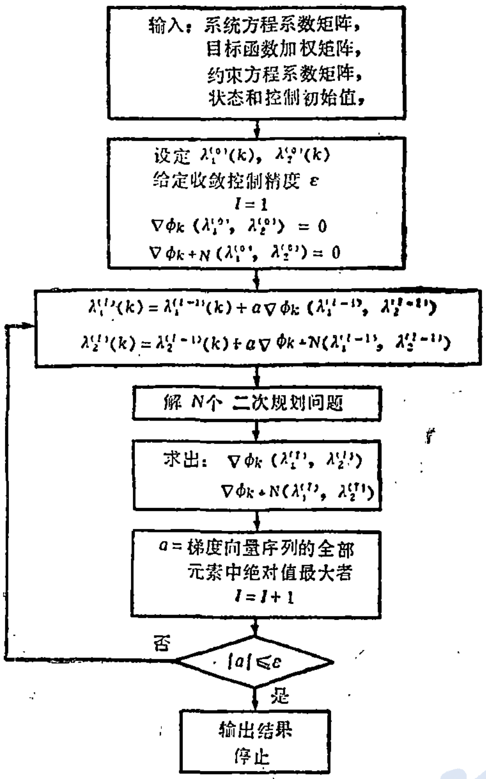

图 1 算法的计算框图

其中

$w_1(k)$— 第 k 周期（年）末地区的污水排放源总量，以价值量作为计算单位；

$w_2(k)$— 第 k 周期（年）末地区的废气尘埃排放源总量，以价值量作为计算单位；

$x_1(k)$— 第 k 周期（年）内地区的污水排放总量，以标准当量作为计算单位；

$x_2(k)$— 第 k 周期（年）内地区的废气尘埃排放总量，以标准当量作为计算单位；

$u_1(k)$— 第 k 周期（年）内地区治理污水排放源的投资额，以价值量作为计算单位；

$u_2(k)$— 第 k 周期（年）内地区治理废气尘埃排放源的投资额，以价值量作为计算单位；

$u_3(k)$— 第 k 周期（年）内地区治理其他产生污水和废气尘埃的污染源的投资额，以价值量作为计算单位。

因为从投资到形成固定资产并发挥其作用存在着时滞效应，所以在方程（15），（16），（18）中采用了滞后的 $u_1(k)$，$u_2(k)$，$u_3(k)$。另外，污水和废气尘埃排放量并不仅仅由这两种排放源产生，为此在方程（17）和（18）中分别加入 $0.08x_1(k)$ 和 $0.15x_2(k)$ 来考虑这个因素的作用。每个变量前面的常系数通过参数辨识得到，具有各自相应的计算单位。除了如上列出的变量以外，仍有其他一些因素对模型有影响，其效果通过各个方程后面的常数值这一项给予反应。

令 $x(k)=[w_1(k)\ \ w_2(k)\ \ x_1(k)\ \ x_2(k)]^T$

$u(k)=[u_1(k)\ \ u_2(k)\ \ u_3(k)]^T$

则动态方程（15），（16），（17），（18）就可以表示成如下的向量形式：

$$x(k+1)=Ax(k)+B_1u(k+1)+B_2u(k)+B_3u(k-1)+B_0$$

其中：

$$A=\begin{pmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0\\ 3.5 & 0.4 & 0.08 & 0.0\\ 0.1 & 0.7 & 0.0 & 0.15\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}-0.12 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & -0.2 & 0.0\\ -0.42 & -0.08 & 0.0\\ -0.012 & -0.14 & 0.0\end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix}-0.15 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & -0.16 & 0.0\\ -0.525 & -0.064 & -1.0\\ -0.015 & -0.112 & -1.0\end{pmatrix},$$

$$B_3=\begin{pmatrix}-0.03 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & -0.04 & 0.0\\ -0.105 & -0.016 & 0.0\\ -0.003 & -0.028 & -0.1\end{pmatrix},$$

$$B_0=\begin{pmatrix}0.5\\ 1.4\\ 3.91\\ 0.89\end{pmatrix}。$$

这个动态向量方程是系统方程（1）的特殊情况。现在的问题是怎样做出一个最优投资

策略，使得在给定的时间周期内能用尽可能少的投资额把污水和废气尘埃的排放源总量以及排放总量都降到可能的最低水平。

设给定的污染治理规划的时间周期为十年，最优控制的目标函数由（2）式给出，加权矩阵$Q(k)$为一个七阶的常对角矩阵Q:

$$Q=\mathrm{diag}\,[1.0\ \ 1.0\ \ 1.5\ \ 2.0\ \ 1.0\ \ 1.0\ \ 1.0]$$

如下的一些实际约束条件必须给予考虑。

4.1 治理污染的投资总额年增长率应限制在15%以下，即

$$[u_1(k+1)+u_2(k+1)+u_3(k+1)]-$$
$$-1.15[u_1(k)+u_2(k)+u_3(k)]\leqslant 0$$

4.2 污水排放总量每年至少递减2%，即

$$x_1(k+1)-0.98x_1(k)\leqslant 0$$

4.3 废气尘埃排放总量每年至少递减3%，即

$$x_2(k+1)-0.97x_2(k)\leqslant 0$$

4.4 为了保证$u_3(k)$的投资效益，加入下面两个约束条件

$$0.08x_1(k)-u_3(k)\geqslant 0,$$
$$0.15x_2(k)-u_3(k)\geqslant 0$$

4.5 所有变量非负，即

$$w_1(k),w_2(k),x_1(k),x_2(k),u_1(k),$$
$$u_2(k),u_3(k)\geqslant 0$$

初始条件为

$$x(0)=\begin{pmatrix}10.0\\24.6\\50.0\\21.5\end{pmatrix},$$

$$u(0)=\begin{pmatrix}4.0\\3.5\\2.0\end{pmatrix},\quad u(-1)=\begin{pmatrix}5.0\\3.3\\1.5\end{pmatrix}。$$

应用本文提出的分解协调-二次规划算法求解该最优控制问题，得到最终结果如下。

k	1	2	3	4	5
$w_1(k)$	8.6 833	7.0 388	5.4 880	3.7 799	2.3 401
$w_2(k)$	25.2 787	25.6 437	25.2 529	23.7 982	21.0 548
$x_1(k)$	44.2 328	37.8 240	31.6 710	25.2 785	20.1 499
$x_2(k)$	19.5 210	18.9 353	18.3 673	17.8 163	17.2 818
$u_1(k)$	8.6 076	5.8 687	7.4 482	7.5 999	4.9 740
$u_2(k)$	0.0 000	4.3 621	5.3 843	9.0 156	12.5 219
$u_3(k)$	2.3 174	2.3 329	1.6 158	0.0 000	1.6 120

k	6	7	8	9	10
$w_1(k)$	1.4 001	0.5 025	0.0 000	0.0 000	0.0 000
$w_2(k)$	16.7 579	11.1 738	6.5 536	4.1 370	3.6 681
$x_1(k)$	13.0 688	7.6 556	3.9 879	3.2 502	3.1 852
$x_2(k)$	12.6 979	8.4 199	4.9 837	3.1 197	2.6 075
$u_1(k)$	4.1 761	5.5 725	0.8 786	1.6 663	1.6 232
$u_2(k)$	16.7 525	19.0 852	11.5 365	6.0 809	2.1 734
$u_3(k)$	1.0 455	0.6 124	0.3 190	0.2 600	0.0 000

5 结论

本文提出的分解协调-二次规划算法能够解决在系统方程和线性不等式约束中存在滞后变量的社会经济系统的最优控制问题。计算实例表明，该算法是有效的。

参考文献

1. Singh M G.Dynamical Hierarchical Control. North-Holland Pub Co,1977
2. Holly S, Rustem B, Zarrop B.Optimal Control for Econometric Models. 1979
3. Chow G C. Analysis and Control of Dynamic Economic Systems. John Wiley and Sons, 1974
4. Bryson A E, HO Yu Chi. Applied Optimal Control Optimization, Estimation,and Control. John Wiley and Sons, 1975
5. Bartels R H, Golub G H, Saunders M A. Numerical Techniques in Mathematical Programming. In:Rosen J B, Mangasarian O L, Ritter K ed., Nonlinear Programming, London and New York, 1970:123—176.

A Decomposition-Coordination-Quadratic Programming Algorithm for Socio-economic Control Systems

LIU Bao et al.

This paper explains the features of a socio-economic control system. After considering the specific problem concerned with the control of socio-economic systems, we gave a new computing method of optimal control by decomposition-coordination quadratic programming algorithm.

（上接第53页）

C9 RET ；返回

以上是单一量程的采集系统，故欠量程信息作用不大，可以不查询。但在自动量程切换的系统中是必不可少的。图2中若用一程控放大器取代741，增益控制线接到PIO的B口就可以实现自动量程切换，超量程时将增益降低，欠量程时将增益加大。

3 误差讨论

本系统的误差来源于模拟开关AD7503的接通电阻R_{ON}，同相放大器与7135本身的误差及其外界的干扰。

同相放大器的输入阻抗

$$z_{if}=2z_{ic}/\!/z_{id}\frac{A_v(s)z_1}{z_1+z_2}$$

式中$z_{id}=2\text{M}\Omega$是μA741的差模输入阻抗，z_{ic}是它的共模输入阻抗，比差模输入阻抗高2—3个数量级，现取200MΩ；$A_v(s)=100\text{dB}$是741的开环增益；$z_1=1\text{k}$，$z_2=9\text{k}$，代入上式后可得

$$z_{if}=2\times200/\!/2\times\frac{1}{10}\times10^5\approx400\ (\text{M}\Omega)$$

AD7503的接通电阻为 170～300Ω，于是引入的系统误差

$$\gamma_R=\frac{R_{ON}}{z_{if}+R_{ON}}=\frac{300}{400\times10^6+300}\approx0.75\times10^{-6}$$

同相放大器的增益

$$A_{vf}=\frac{z_1+z_2}{z_1}$$

根据误差传递公式

$$\gamma_A=\frac{\partial\ln A_{vf}}{\partial z_1}\Delta z_1+\frac{\partial\ln A_{vf}}{\partial z_2}\Delta z_2$$

$$=\frac{-z_2}{z_1(z_1+z_2)}\Delta z_1+\frac{1}{z_1+z_2}\Delta z_2$$

$$=0.1\Delta z_2-0.9\Delta z_1$$

四位半A/D转换器的分辨率为0.5×10^{-4}，可见，模拟开关接通电阻引入的误差γ_R可以忽略不计。而电阻R_1与R_2的偏差引入的误差却会产生严重的影响，必须进行精心的挑选。此外可以借助7135的校准电阻微调基准源，以补偿引入的误差。所以元件的稳定性比匹配精度显得更为重要。

因为时钟频率为100kHz，采样时间为10000个时钟周期，即100ms，正好为50Hz工频干扰周期20ms的整数倍，所以系统的串模抑制比SMR接近无限大。为了提高共模抑制比CMR，最好将7135的负输入端浮置。此外要特别注意地线的接法，数字地与模拟地要严格分开，并在一公共点接地。注意了以上提到的问题后，本系统的精度可达±读数0.025%±2个字，即当满刻度时，精度为0.035%。

参考文献（略）