

# 基本最小二乘参数估计的程序设计

郭一新

(黑龙江省应用数学研究所)

(摘要) 本文给出了基本最小二乘参数估计—最小二乘法、递推最小二乘法(带遗忘因子)的程序设计框图和程序清单,并附有控制系统辨识的计算实例,程序用BASIC语言编制,在Z-80微型计算机上调试成功,可供广大科研、工程技术人员直接使用。

## 一 最小二乘法程序设计

### 1. 最小二乘法公式表达

对于单输入、单输出控制系统,可有如下的预报模型:

$$y(t+k) = \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \dots + \alpha_n y(t-n+1) + \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t-1) + \dots + \beta_m u(t-m) + \varepsilon(t+k) \quad (1)$$

其中 $m, n$ 分别是输入、输出的阶次,  $\varepsilon(t+k)$ 是随机干扰,或称残差,  $K$ 为滞后时间。

令:

$$\theta^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) \quad (2)$$

$$\phi^T(t) = (y(t), y(t-1), \dots, y(t-n+1), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m)) \quad (3)$$

则模型(1)可以写成:

$$y(t+k) = \phi^T(t)\theta + \varepsilon(t+k) \quad (4)$$

(4)式就变成了最小二乘格式,如果令

$$\hat{\theta}^T(t) = (\hat{\alpha}_1(t), \hat{\alpha}_2(t), \dots, \hat{\alpha}_n(t), \hat{\beta}_0(t), \hat{\beta}_1(t), \dots, \hat{\beta}_m(t)) \quad (5)$$

那么相应求 $\hat{\theta}(t)$ 的最小二乘公式:

$$\hat{\theta}(t) = [H^T(t)H(t)]^{-1}H^T(t)Y(t+k) \quad (6)$$

其中:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \vdots \\ \phi^T(t-1) \\ \phi^T(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$Y(t+k) = \begin{pmatrix} y(1+k) \\ y(2+k) \\ \vdots \\ y(t+k) \end{pmatrix} \quad (8)$$

(4)式中 $t$ 为某采样时刻, (6)、(8)式中滞后 $k$ 规定为若干采样间隔之和。

### 2. 程序框图

依据(6)式求 $\hat{\theta}(t)$ 的最小二乘公式程序框图,如图1。

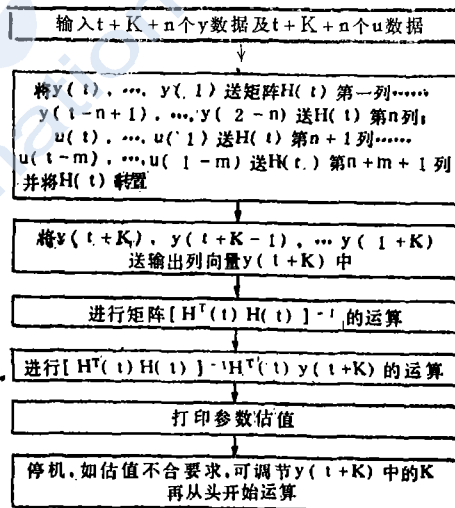


图1 最小二乘法程序框图

### 3. 例题与程序说明

1) 本程序现输入的数据是文献[1]中例8.1的数据,包括100个被控制量 $-y$ 与100个控制量 $u$ ,它们应分别按1,2,...,100的采样时刻顺序输入。先输 $-y$ ,后输 $u$ 。这样,程序可以自动完成组成数据组的工作,现每一数据组取4个观测数据,即:

$$\phi(t) = [-y(t), -y(t-1), u(t), u(t-1)]$$

由于每组的观测数据中,  $-y(t)$ 与 $-y(t-1)$ 之间、 $u(t)$ 与 $u(t-1)$ 之间均相差一个采样周期, 输出向量 $Y(t+k)$ 中(现取 $k=1$ ),  $t$ 又滞后一个采样周期, 如果再留一个调节 $k$ 用的采样周期, 那么本例最多能取97个数据组;

2) 为适应Z-80计算机规则, 本程序的序号从零开始, 赋值语句不加LET, 假设语句为IF.....THEN;

3) 5—50分十行输入100个 $-y$ 值(略);

4) 55—100分十行输入100个 $u$ 值(略);

150—152定义控制量 $u$ 数据组为 $U(N)$ , 被控量 $-y$ 数据组为 $Y(N)$ ,  $H^T(t)$ 矩阵为 $A(M, W)$ ,  $H(t)$ 矩阵为 $B(W, M)$ , 输出向量 $Y(t+k)$ 为 $D(W)$ 、参数 $\theta(t)$ 为 $E(M)$ ;

5) 395—415将 $Y(t+k)$ 读入 $D(W)$ 中;

6) 420—535将 $\phi(1)$ 到 $\phi(97)$ 共97个数据组读入 $B(M, W)$ , 即组成 $H(t)$ ;

7) 650—670将 $H(t)$ 转置;

8) 685—1085计算

$$\hat{\theta}(t) = [H^T(t)H(t)]^{-1}H^T(t)Y(t+k)$$

并打印, 如需 $[H^T(t)H(t)]^{-1}$ 矩阵数据, 可增加 $Z(M, M)$ 输出语句;

9) 一般地, 如求得的 $\hat{\theta}(t)$ 不合要求, 可调节 $k$ , 如将400语句改为 $D(I) = -Y(I+3)$ , 再运算。(因本例已规定滞后为1, 故无须调节。

10) 如要改变原始数据个数。数据组个数或维数, 只须改变135, 140, 145中 $N, M, W$ 的赋值即可;

11) 如果改变 $\phi(t)$ 结构, 可增减420—530中赋值语句, 并改变 $M$ 赋值;

12) Z-80机对此例计算运行时间为50秒钟。程序清单与输出打印见附录I。

## 二 递推最小二乘法 (带遗忘因子) 程序设计

### 1. 递推最小二乘法(带遗忘因子)公式表达

对控制系统而言, 参照(1) - (8)式的最小

二乘法公式表示, 直接可以导出下述的计算参数估值的递推公式:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + M(t-1)[y(t) - \phi^T(t-k)\hat{\theta}(t-1)] \quad (9)$$

$$M(t-1) = p(t-1)\phi(t-k)[\rho + \phi^T(t-k)p(t-k)\phi(t-k)]^{-1} \quad (10)$$

$$p(t) = 1/\epsilon[p(t-1) - M(t-1)\phi^T(t-k)p(t-1)] \quad (11)$$

为编程方便起见, 可将(11)式化为:

$$p(t) = 1/\rho\{p(t-1) - M(t-1)[\rho + \phi^T(t-k)p(t-1)\phi(t-k)]M^T(t-1)\} \quad (12)$$

有两种方法可用来得到初值 $p(0)$ 。一种是计算(6)式中 $[H^T(0)H(0)]^{-1}$ , 其中 $H(0)$ 矩阵由若干初始数据组成。另一种是简取 $P(0) = 1/\epsilon I$ ,  $I$ 是单位矩阵,  $\epsilon$ 是很小的正数。参数 $\rho$ 从 $0 < \rho \leq 1$ 中选取。

### 2. 程序框图

依据(9)、(10)、(12)式, 递推最小二乘法(带遗忘因子)程序框图如图2。P(0)如取 $[H^T(0)H(0)]^{-1}$ , 那么可利用上一节程序进行计算, 相应增加 $Z(M, M)$ 输出打印。 $\hat{\theta}$ 可由 $(0, 0, \dots, 0)^T$ 开始, 也可以利用上一节的程序, 先求出 $\hat{\theta}$ 。

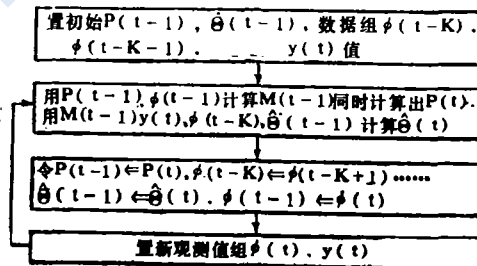


图2 递推最小二乘法(带遗忘因子)程序框图

### 3. 例题与程序说明

某系统由(1)式形式的差分方程表示, 具体地有:

$$y(t+1) = \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t-1) + \epsilon(t+1) \quad (13)$$

令:

$$\theta^T = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1)$$

$$\phi^T(t) = (y(t), y(t-1), u(t), u(t-1))$$

关于 $\theta$ 的估值,即可运用递推最小二乘法程序计算,程序说明如下:

1) 10—40 用最小二乘法辨识得到的 $[H^T(t)H(t)]^{-1}$ 数据,作本程序的 $p(t)$ 值;

2) 50 为 $\hat{\theta}(t)$ 值,用最小二乘法先求出的;

3) 60—70 为 $\phi(t), \phi(t+1)$ 值;

4) 100 为 $y(t+1)$ 值;

5) 670—1230 求 $\hat{\theta}(t+1)$ 的子程序,遗忘因子 $\rho$ 取0.95;

6) 260 新 $y(t+1)$ 值;

7) 270 新 $\phi(t+1)$ 值;

8) 280 转子程序。280条以后重复260到280的步骤,输入新 $y(t+1), \phi(t+1)$ 各项数据,进行计算;

9) 输出打印中,  $N_1(I)$ 为 $\phi(t+1)$ 值,  $x(I)$ 为 $\phi(t)$ 值,  $G$ 为 $\theta(t+1)$ 值;

10) 如系统的差分方程中,滞后 $k$ 大于1,程序应作相应变化(参考文献[4]);

11) Z-80机对此例计算一次 $\hat{\theta}$ 值,仅需2秒钟。

程序清单与输出打印(摘录)见附录。

### 附录 I 最小二乘法程序清单与输出打印

```

.....          495 B(I,2)=U(I+1)          810 C=1/C(S,S)
.....          500 I=I+1                815 GOSUB 900
135 N=99        505 IF I=W+1 THEN 515    820 FOR T=0 TO M
140 M=3         510 GOTO 495             825 IF T=S THEN 840
145 W=96       515 I=0                  830 C=-C(T,S)
150 DIM Y(N),U(N),P(N),          520 B(I,3)=U(I)          835 GOSUB 925
      A(M,W)B(W,M)              525 I=I+1                840 NEXT T
152 DIM C(M,M),Z(M,M),          530 IF I=W+1 THEN 650    845 NEXT S
      D(W),F(M,W),E(M)         535 GOTO 520             850 GOTO 950
155 FOR I=0 TO N                650 FOR I=0 TO W        855 FOR J=0 TO M
160 READ Y(I)                  655 FOR J=0 TO M        860 B=C(S,J)
165 NEXT I                    660 A(J,I)=B(I,J)       865 C(S,J)=C(T,J)
170 FOR I=0 TO N                665 NEXT J              870 C(T,J)=B
175 READ U(I)                  670 NEXT I              875 B=Z(S,J)
180 NEXT I                    685 FOR K=0 TO M        880 Z(S,J)=Z(T,J)
395 I=0                        690 FOR I=0 TO M        885 Z(T,J)=B
400 D(I)=-Y(I+2)                695 S=0                  890 NEXT J
405 I=I+1                      700 FOR J=0 TO W        895 RETURN
410 IF I=W+1 THEN 420          705 S=A(I,J)*B(J,K)+S  900 FOR J=0 TO M
415 GOTO 400                    710 NEXT J              905 C(S,J)=C*C(S,J)
420 I=0                        715 C(I,K)=S            910 Z(S,J)=C*Z(S,J)
425 B(I,0)=Y(I+1)              720 NEXT I              915 NEXT J
430 I=I+1                      725 NEXT K              920 RETURN
435 IF I=W+1 THEN 445          760 FOR S=0 TO M        925 FOR J=0 TO M
440 GOTO 425                    765 Z(S,S)=1            930 C(T,J)=C(T,J)+C*C(S,J)
445 PRINT                      770 NEXT S              935 Z(T,J)=Z(T,J)+C*Z(S,J)
455 PRINT                      775 FOR S=0 TO M        940 NEXT J
465 I=0                        780 FOR T=S TO M        945 RETURN
470 B(I,1)=Y(I)                785 IF C(T,S)<>0 THEN 805 950 PRINT
475 I=I+1                      790 NEXT T              985 FOR K=0 TO W
480 IF I=W+1 THEN 490          795 PRINT"MATRIX SINGULIR" 990 FOR I=0 TO M
485 GOTO 470                    800 GOTO 1085            995 S=0
490 I=0                        805 GOSUB 855            1000 FOR J=0 TO M

```

```

1005 S=Z(I,J)*A(J,K)+S      1045 S=F(I,J)*D(J)+S      1085 END
1010 NEXTJ                    1050 NEXT J                打印输出
1015 F(I,K)=S                1055 E(I)=S                E(I)=-1.500005906846
1020 NEXT I                    1060 NEXT I                E(I)=0.70000662758285
1025 NEXT K                    1065 FOR I=0 TO M          E(I)=0.99996601059714
1030 FOR I=0 TO M              1070 PRINT                  E(I)=0.50003154414456
1035 S=0                       1075 PRINT"E(I)=",E(I)    ***
1040 FOR J=0 TO W              1080 NEXT I                >>

```

### 附录 II 递推最小二乘法 (带遗忘因子) 程序清单与输出打印 (摘录)

```

10 DATA 3.26E-03,-1.23E-04, 270 DATA -141,-130,101,94 930 W=1/(0.95+C)
   1.98E-03,2.8E-03          280 GOSUB 670              940 FOR I=0 TO N
20 DATA -1.23E-04,6.77E-05,  ....                          950 B(I)=Y(I)*W
   -7.3E-05,-2.54E-05       640 END                    960 NEXT I
30 EDATA 1.98E-03,-7.3E-05,  670 FOR I=0 TO N          970 FOR I=0 TO N
   2.24E-03,6.43E-04         680 X(I)=N1(I)           980 F(I)=B(I)*(C+0.95)
40 DATA 2.8E-03,-2.54E-05,  690 NEXT I                990 NEXT I
   6.43E-04,3.63E-03         700 FOR I=0 TO N         1000 FOR I=0 TO N
50 DATA -0.02449,1.1739E-03, 710 READ N1(I)           1010 FOR J=0 TO N
   1.2958,-0.1545           720 NEXT I                1020 H(I,J)=F(J)*B(I)
60 DATA -122,-130,85,81     721 PRINT                  1030 NEXT J
70 DATA -130,-122,94,85     740 PRINT                  1040 NEXT I
80 N=3                       750 FOR I=0 TO N         1050 FOR I=0 TO N
90 DIM A(N,N),X(N),G(N),N1  760 PRINT"N1(I)=",N1(I),  1060 FOR J=0 TO N
   (N),Y(N),B(N)            770 NEXT I                1070 A(I,J)=(A(I,J)-H(I,J))
95 DIM F(N),H(N,N),M(N)     775 PRINT                  *(1/0.95)
100 Z=130                    780 FOR I=0 TO N         1080 NEXT J
110 FOR I=0 TO N              790 PRINT"X(I)=",X(I),  1090 NEXT I
120 FOR J=0 TO N              800 NEXT I                1100 S=0
130 READ A(I,J)              801 PRINT                  1110 FOR I=0 TO N
140 NEXT J                    810 FOR I=0 TO N         1120 S=X(I)*G(I)+S
150 NEXT I                    820 S=0                   1130 NEXT I
160 FOR I=0 TO N              830 FOR J=0 TO N         1140 L=S
170 READ G(I)                 840 S=A(I,J)*X(J)+S      1150 L1=Z-L
180 NEXT I                    850 NEXT J                1160 FOR I=0 TO N
190 FOR I=0 TO N              860 Y(I)=S                1170 M(I)=B(I)*L1
200 READ X(I)                 870 NEXT I                1180 NEXT I
210 NEXT I                    880 S=0                   1190 FOR I=0 TO N
220 FOR I=0 TO N              890 FOR I=0 TO N         1200 G(I)=G(I)+M(I)
230 READ N1(I)                900 S=X(I)*Y(I)+S        1210 PRINT"G=",G(I),
240 NEXT I                    910 NEXT I                1220 NEXT I
250 GOSUB 750                 920 C=S                   1230 RETURN
260 Z=141

```

#### 打印输出 (摘录)

```

N1(I) = -200      N1(I) = -189      N1(I) = 150      N1(I) = 160
X(I) = -189      X(I) = -179      X(I) = 160      X(I) = 150
G = -0.46077204696023  G = -0.073153044291353  G = 0.8655307057761 (下转38页)

```

$$\left. \begin{aligned} t_s &= t_m \\ m/n &= 1/(1+\delta\%) \end{aligned} \right\} (6)$$

其中  $t_m$ 、 $\delta\%$  是不带反超调调节器时系统在单位阶跃输入量作用下的  $t_m$  和  $\delta\%$ 。

按(6)式镇定的系统在单位阶跃输入量作用下具有  $\delta\% \approx 0$ ,  $t_s \approx t_m$  的优质动特性。

当采用 II 类反超调调节器时, 应按二阶线性逼近方法求出不带反超调调节器的系统在单位阶跃输入量作用下的  $t_1$ 、 $t_m$ 、 $t_s$ 、 $\delta\%$  等数值, 并由此绘出  $x(t)$  的大致图形, 然后求出  $t_a$ 、 $t_b$ , 使  $y(t) = x(t) - x(t-t_a)$  在  $t=t_b$  时有最大值  $y(t_b) = 1$ , 使电子开关  $J$  在  $(t_a, t_b)$  时间内吸合, 即可实现  $\delta\% \approx 0$ ,  $t_s \approx t_1$  的优质动特性, 这样的动特性已接近最佳动特性, 远比电气传动设计中的“三阶最佳”加惯性滤波的动特性要好, 而且设计、调整都很简便。实际工程应用中, 还可将图 8 中的反超调调节器改接在闭环内  $W_1(s)$  之前, 用输入信号和反馈信号来控制电子开关  $K$  或  $J$  的动作时间, 也可用微处理机代替反超调调节器, 使系统不仅能够实现似最佳动特性还可以抑制干扰的影响。

### 三 小 结

利用二阶线性逼近系统代替高阶线性反馈控制系统计算动特性时, 误差一般不超过 5%,

(上接 52 页)

$$G = -0.24279185142384$$

$$N1(I) = -195$$

$$X(I) = -200$$

$$G = -0.46897021899229$$

$$G = -0.27516601162172$$

>>

$$N1(I) = -200$$

$$X(I) = -189$$

$$G = -0.073764517440264$$

\*\*\*\*\*

$$N1(I) = 160$$

$$X(I) = 150$$

$$N1(I) = 150$$

$$X(I) = 160$$

$$G = 0.88317649017867$$

能满足一般工程计算的需要, 若需进一步提高计算精度, 可于实频特性的低、中频入手, 加置误差校正措施, 即可使误差很快下降, 整个计算过程已编成计算机程序, 可由计算机来完成。

### 附录 (略)

1. 二阶线性逼近系统参数计算公式的推导
2. 列线图 3、4 的绘制依据
3. 闭环实频特性曲线的采样值  $R_m$ 、 $\omega_m$ 、 $\omega_c$  或  $\omega_c$ 、 $R(\omega_c/3)$ 、 $R(2\omega/3)$  的确定方法
4. 定理和推论的证明
5. 在二阶线性逼近方法的基础上提高时域特性逼近精确性的方法
6. 反馈控制系统按二阶线性逼近方法进行设计的 BASIC 程序

### 参 考 文 献

- (1) 周其鉴、李祖枢, 数学模型简化及其在工程系统中的应用, 重庆大学学报, 1980, No.4.,
- (2) 胡锡恒, 频率拟合-Padé 联合降阶——一种具精度灵活性和简易性的简化方法, 信息与控制, 1983年, 第2期。
- (3) Shieh, L.S., A Method for Modelling Transfer Function Using Dominant Frequency Response Data and Its Application, Int. J. Systems Science, Vol.10, No.10, 1979.

### 参 考 文 献

- (1) K.J. Aström, Lectures on the Identification Problem-The Least Squares Method, Report 6806 of Lund Institute of Technology Division of Automatic Control, 1968.
- (2) Goodwin G.C. and Payne, R.L., 动态系统辨识, 试验设计与数据分析, 张水光、袁振东译, 科学出版社, 1981.
- (3) 王惠德编, BASIC 程序设计基础, 辽宁人民出版社, 1980.
- (4) 郭一新, 自校正调节器的高线试验程序设计, 信息与控制, 1981年第4期。
- (5) 张巨洪等, BASIC 语言程序库, 清华大学出版社, 1983.