

采用模拟调节器的二级倒立摆的控制*

尹征琦 冯祖仁 陈辉堂

(西安交通大学)

〔提要〕 二级倒立摆的研究已经进行了很长时间,从发表的文献看,采用降阶观测器的模拟控制器的尝试未能取得良好的效果,最终转向采用数字计算机。本文成功地以降阶观测器这样简单的模拟控制器,实现了对二级倒立摆的控制系统受到大的干扰或人为改变实际模型参数时,能非常稳定的工作。

由动力学方程可推得二级倒立摆的数学模

一 前 言

型

倒立摆系统的实际研制开始得较早^{1,2)},二级倒立摆较单级倒立摆更为复杂而难于实现控制,1972年文献〔3〕应用极点配置法对二级倒立摆设计了模拟控制器,使用了全阶观测器,而使用降阶观测器的尝试未能成功,他们认为原因在于降阶观测器对于系统参数变化过于敏感,而且不能克服系统中的噪声影响。1977年文献〔4〕改用小型计算机控制,设计方法是极点配置法,用了降阶观测器和线性函数观测器,他们认为文献〔3〕使用降阶观测器未能成功的原因在于反馈设计不当,模拟电路小信号运行不精确,大信号运算饱和产生误差等问题。

本文应用最优状态调节器理论和状态观测器理论设计了二级倒立摆的控制,采用了线性定常状态反馈和降阶观测器结构,用一般的集成运放、电阻、电容等构成的模拟电路实现了控制。证实了降阶观测器可以用模拟电路实现,即使是较复杂的系统,现代控制理论的应用也并不一定要求运算部件的高精度。本文的全部分析和设计工作是在计算机上进行的。

二 二级倒立摆系统

图2中,小车在导轨上作直线运动,上、下摆间,下摆与小车间以轴承连结,伺服电机通过皮带轮,皮带驱动小车,三个检测信号送入控制器,控制信号经功放、伺服电机以保持二级倒立摆稳定平衡。

$$M^* \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + F^* \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + N^* = \begin{pmatrix} G_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e \quad (1)$$

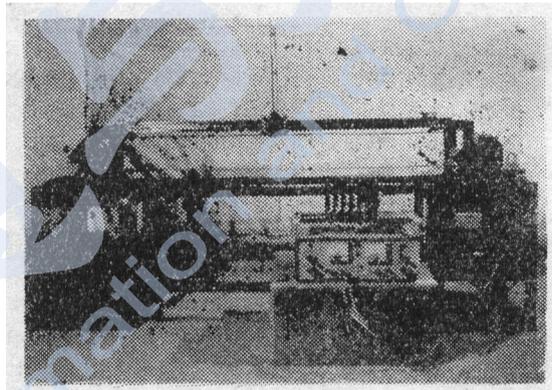


图1 二级倒立摆

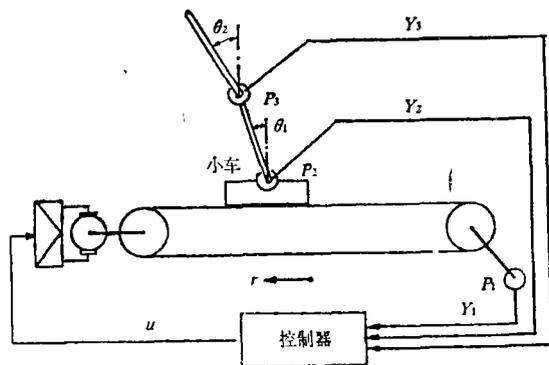


图2 二级倒立摆系统示意图

* 收到本文的时间是1984年3月15日。

$$M^* = \begin{pmatrix} M_0 + M_1 + M_2 & (M_1 l_1 + M_2 L_1) \cos \theta_1 & M_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (M_1 l_1 + M_2 L_1) \cos \theta_1 & M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2 + J_1 & M_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ M_2 l_2 \cos \theta_2 & M_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & M_2 l_2^2 + J_2 \end{pmatrix}$$

$$F^* = \begin{pmatrix} F_0 & -(M_1 l_1 + M_2 L_1) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & -M_2 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 & F_1 + F_2 & -M_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - F_2 \\ 0 & M_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - F_2 & F_2 \end{pmatrix}$$

$$N^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -(M_1 l_1 + M_2 L_1) g \sin \theta_1 \\ -M_2 l_2 g \sin \theta_2 \end{pmatrix}, \quad G_0 = \frac{2KK_T}{d(R+R_i)}, \quad F_0 = F_0' + \frac{\Delta K_T^2}{d^2(R+R_i)}$$

二级倒立摆实际参数值 表 1

符号	意 义	数 值	单 位
r	小车位移		m
θ_1	下摆角位移		rad
θ_2	上摆角位移		rad
M_0	小车及驱动部分等效质量	1.048	kg
M_1	下摆质量	0.1638	kg
M_2	上摆质量	0.1294	kg
J_1	下摆转动惯量	6.279×10^{-2}	kgm ²
J_2	上摆转动惯量	4.405×10^{-2}	kgm ²
l_1	下摆质心—轴心距	0.2385	m
l_2	上摆质心—轴心距	0.2296	m
L_1	下摆轴心—轴心全长	0.4994	m
F_0	小车等效摩擦系数	10.66	kg/s
F_0'	小车等效机械摩擦系数	1.771	kg/s
F_1	下摆小车间等效摩擦系数	4×10^{-3}	kgm ² /s
F_2	上、下摆间等效摩擦力系数	1.5×10^{-3}	kgm ² /s
K	功率增益	8.0	
K_T	电机机电常数	0.7	
d	皮带轮直径	0.1336	m
R	电机等效电阻	11.302	Ω
R_i	功放等效电阻	1.052	Ω

$$M = \begin{pmatrix} M_0 + M_1 + M_2 & M_1 l_1 + M_2 L_1 & M_2 l_2 \\ M_1 l_1 + M_2 L_1 & M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2 + J_1 & M_2 L_1 l_2 \\ M_2 l_2 & M_2 L_1 l_2 & M_2 l_2^2 + J_2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_0 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 + F_2 & -F_2 \\ 0 & -F_2 & F_2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(M_1 l_1 + M_2 L_1)g & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 l_2 g \end{pmatrix}$$

选择状态变量为 $x = [r \ \theta_1 \ \theta_2 - \theta_1 \ \dot{r} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1]^T$, $u = e$ 。代入数据得到系统状态方程

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.98 & 9.56 \times 10^{-2} & -9.55 \\ 0 & 26.9 & -13.8 & 21.8 \\ 0 & -31.2 & 57.8 & 25.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8.17 \times 10^{-3} & -3.56 \times 10^{-3} & 6.18 & \\ -0.160 & 0.131 & -14.1 & \\ 0.350 & -0.429 & 16.4 & \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

对象的不稳定平衡点为

$$r = \theta_1 = \theta_2 = \dot{r} = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$

由 (1) 得到线性化矩阵方程:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e$$

(2)

A的特征值为 0, -10.5, -7.78, -3.58,

3.84, 7.91。方程(3)完全可控、可观测, 是不稳定的对象系统。

三 二级倒立摆的控制设计

控制的目的是使二级倒立摆在不稳定的平衡点保持稳定的平衡, 能经受一定的外加干扰。本文应用最优状态调节器理论设计了线性定常状态反馈, 闭环系统的动态性能及稳态性能则根据实验要求调整二次型性能指标中的加权阵来达到。

由于数学模型的近似性, 参数的不准确性, 实际存在的非线性影响以及量测噪声和误差的影响, 实际闭环系统的性能与数学模型的性能并不能精确吻合, 理论上成立的控制设计并不都能使系统满意工作, 甚至不能一定保证闭环系统稳定。同时, 对系统通常所用的性能要求无法转化为二次型性能指标。在控制设计中应用最优状态调节器理论的关键在于由分析和实验找到能使系统稳定工作的“初始”控制, 再根据对闭环系统的性能要求调整二次型性能指标, 修正设计。

根据最优状态调节器理论^[5,6]

$$\text{对于系统 } \dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

$$\text{使性能指标 } J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5)$$

$$\text{取极小的控制规律为: } u = Kx \quad (6)$$

$$K = -R^{-1} B^T P \quad (7)$$

其中 $R > 0$, $Q \geq 0$ 且对 $Q = D^T D$, $\{A, D\}$ 完全可观测, $\{A, B\}$ 完全可控, P 为满足 Riccati 方程的唯一正定对称解:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (8)$$

实际设计中, 一般取 $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_n]$, $R = [r_1, r_2, \dots, r_p]$ 。

我们认为, 可以按如下原则和方法初步选择和调整 R, Q 中的元素, 以得到“初始”控制和进一步改善实际闭环系统的性能。

1) 按各状态的物理意义, 对它们的性能要求及为使线性化方程有效, 先大致取出 Q

中元素的比例 (Q, R 的元素表示了对调整过程中相应状态偏差及控制各分量大小的重视程度和要求, q_i 具有 $x_i (i=1, 2, \dots)$ 在响应过程中偏差平方倒数的相对比例的意义^[7]。

2) 根据设计所得的反馈增益和闭环系统特征值调整 R 相对 Q 的比例, R 的相对减小使系统的动态品质改善, 但导致过大的最大模特征值和过大的控制, 超出执行机构的能力, 加大量测噪声的影响。

3) 根据计算机仿真和实验, 由对闭环系统的性能要求调整 Q, R 中各元素比例, 直到兼顾各方面的要求。两次仿真的相对关系与实际闭环系统响应的相应关系是相似的, 充分利用计算机仿真可以减少实验次数。

二级倒立摆系统中, 为使线性化方程(2)有效, 大致有

$$\max|\theta_1| < 0.05 \text{ rad} \quad \max|\dot{\theta}_1| < 0.1 \text{ rad/s}$$

$$\max|\theta_2 - \theta_1| < 0.02 \text{ rad}$$

$$\max|\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1| < 0.1 \text{ rad/s}$$

此外, 由实际系统要求

$$\max|r| < 0.4 \text{ m} \quad \max|\dot{r}| < 0.4 \text{ m/s}$$

$$\max|e| < 3 \text{ v}$$

设计时的初始比例可先取为: $q_1:q_2:q_3 = 1:64:400$, r 先取为 1, q_4, q_5, q_6 可先取为 0, 通过仿真, 对此实验, 加以调整和修正, 最后得到控制设计。

四 降阶观测器的设计

状态反馈须要利用系统的全部状态信息, 二级倒立摆中直接检测的状态信息只有三个, 可以构造全阶或降阶观测器重构系统状态。降阶观测器有较大的实用价值, 可以使用 Go-pinith 设计方法^[8]设计降阶观测器

对于完全观测系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (9)$$

$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [I_m \quad O_{n-m}]$$

降阶观测器为

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} y \\ z + Ly \end{bmatrix} \\ \dot{z} &= Fz + Gy + Hu \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $F = A_{22} - LA_{12}$, $G = A_{21} + FL - LA_{11}$, $H = B_2 - LB_1$, L 为任意使 F 渐近稳定的矩阵。

L 在满足使 F 渐近稳定条件下的任意性提供了很大的设计自由度, 但应受如下考虑的限制。 F 的特征值负实部越大重构的系统状态精度越高, 跟随实际系统状态的程度越好, 然而将加大量测噪声的影响, 同时为减小量测误差对系统的影响, 也有必要限制 L 中元素过大。

为了较小依赖于设计经验 (例如 F 特征值分布的选取) 减少试探步骤, 使设计工作系统化, 本文引用文献〔9〕提出的降阶观测器设计方法, 仅以实际系统设计要求修改了选取原则 2)。

1) 对一系列 α_i (例如 $\alpha_i = 10^i$, $i = \dots -1, 0, 1, \dots$)

$$\bar{1}. \text{ 计算 } L = \frac{1}{\alpha_i} \Omega A_{12}^T \quad (11)$$

Ω 为满足 Riccati 方程的唯一正定解, 即

$$A_{22} \Omega + \Omega A_{22}^T - \frac{1}{\alpha_i} \Omega A_{12}^T A_{12} \Omega + I_{n-m} = 0 \quad (12)$$

$\bar{2}. \text{ 计算 } F = A_{22} + LA_{12}$, 及其特征值。

$\bar{3}. \text{ 计算 } \text{tr} S$, S 为

$$F^T S + SF + K_1^T R K_2 = 0 \quad (13)$$

的对称正定解。

$K = [K_1 \quad K_2]$ 为按 (7) 选定的某一状态反馈。

2) 按下列原则选取尽量小的 α_i 及对应的 L , 并由 (10) 得到降阶观测器的结构参数矩阵:

$\bar{1}. \text{ 使 } \text{tr} S$ 较小且 α_i 的减小使 $\text{tr} S$ 减小不多。

$\bar{2}. \text{ 使 } L$ 中元素不过大。

$\bar{3}. \text{ 使 } F$ 的特征值负实部较合适 (例如最小模特征值为 $A + BK$ 特征值负实部的 5 倍以上, 最大模特征值不过大)。

降阶观测器的引入将增加实际闭环系统的性能指标值(5)〔10〕, 同时降低稳定裕量, 设计中还应兼顾重构状态跟随的快速性, 减小量测噪声通过观测器引入的影响以及物理上的可实现性, 上述方法较好地兼顾了这些方面, 而且具有系统性。实际上, 按 (11) 得到的 L 使实际闭环系统性能指标在使 L 中元素不过大的条件下取极小, 所用反馈增益 K 只是为使计算得以进行, 设计结果与其无关。

应用上述方法, 二级倒立摆的降阶观测器设计为

$$L = \begin{bmatrix} 5.05 & 2.52 & -3.00 \\ -2.57 & 14.2 & -4.63 \\ 4.23 & -5.08 & 15.6 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -14.6 & -2.51 & 3.00 \\ 24.3 & -14.3 & 4.76 \\ -29.5 & 5.43 & 16.0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -54.5 & -89.5 & 102 \\ 180 & -139 & 53.6 \\ -231 & 52.7 & -128 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 6.18 \\ -14.1 \\ 16.4 \end{bmatrix}$$

F 的特征值为 $-10.0, -17.5 \pm j11.9$

五 控制的实现和实验

本文应用由电阻、电容、集成运放等构成的线性模拟电路实现了控制器, 为实验方便采用图 3 所示的结构原理图。控制器由降阶观测器和线性反馈电路组成。

本文对二级倒立摆进行了实验, 图 4 和图 5 分别为表 2 中两个不同的反馈设计下, 实际系统的响应曲线和计算机仿真曲线, 实验曲线是当在上摆顶端加一冲击作用后用光线示波器测出的。

实验表明, 控制设计和实现是成功的。

按不同性能要求作出的设计实例

表 2

R	Q			K			A + BK的特征值		曲线
1	0.8	60	500	-0.894	-32.8	-91.6	-0.256	$-3.62 \pm j2.22$	图 4
	10	0	0	-2.81	-14.6	-13.9	-2.41	$-20.0 \pm j8.84$	
1	10	500	2500	-3.15	-47.0	-129	$-0.915 \pm j0.713$	图 5	
	0	0	0	-4.27	-20.4	-18.6	$-3.23 \pm j2.21$ $-22.5 \pm j19.5$		

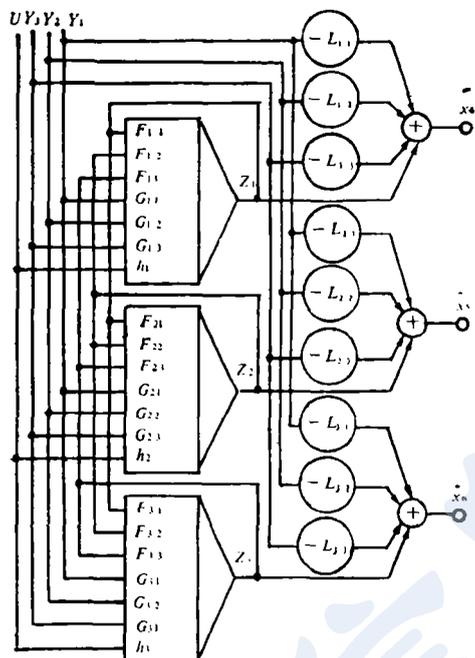


图 3 控制器结构原理图

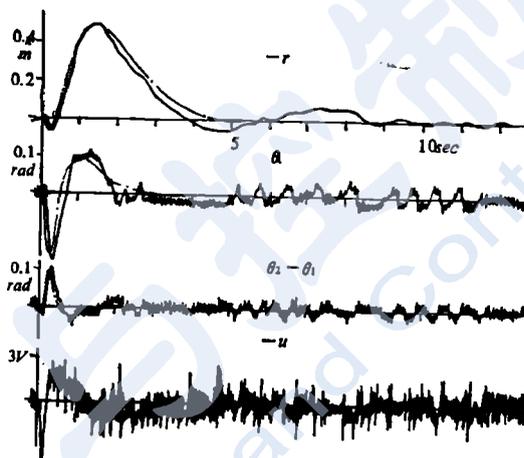


图 5

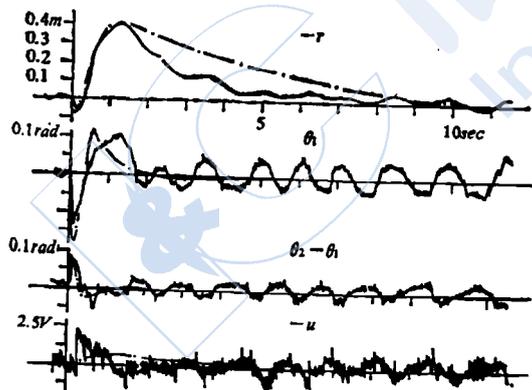


图 4

参 考 文 献

(1) Bryson, A.E., Luenberger, D.G., The Synthesis of Regulator Logic Using State-vari-

able Control, Proceeding of the IEEE, 58(11), 1803-1811 (1970).

(2) Mori, S., Nishihara, H., Furuta, K., Control of Unstable Mechanical System-control of Pendulum, Int. J. Cont. 23(5). 673-692 (1978).

(3) Sturgen, W.R., Loscutoff, M.V., Application of Modal Control and Dynamic Observers to Control of a Double Inverted Pendulum, Proceeding of JACC, 857-865(1972).

(4) Furuta, K., Okutani, T., Sone, H., Computer Control of a Double Inverted Pendulum, Computer and Elec. Eng., 5-1, 67-84(1978).

(5) Anderson, B.D.O. and Moore, J.B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall, 1974.

(6) Sage, A.P., Optimal System Control, Prentice-Hall, 1977.

(7) 梶原宏之, 小菅一弘, 古田胜久, 傾斜されたレル上の二重倒立振子の位置制御, 第15卷第7号, 昭和54年12月, 873-879.

(8) Gopinath, B., On the Control of Linear Multiple Input-output Systems, The Bell Systems Tech. J. 50 (March 1971) 1063-80.

(9) Kudva, P., Gourishankar, V., Optimal Observers for the State Regulation of Linear Continuous-time Plant, Int. Control, Vol. 26, No.1, 115-120, 1977.

ABSTRACTS

A Simulation of MI/MO Varing Parameter-input-structure System

Gu Wenjin

The principle for simulation of MI/MO varing parameter-input-structure system has been described, and an example is included to show it's application.

The simulation program has been used to solve a flying problem of a tactical missile successfully. (P.1)

Control of a Double Inverted Pendulum Using an Analogue Regulator

Yin Zhengqi et al.

The reseach about control of an inverted pendulum has been carried out for a long time. However it was failed in using an analogue controller with the reduced order observer and turned to implement the control system with a digital one.

In this paper we first time implement the control system with an analogue controller in partial order observer structures. The system is quite stable even under large disturbance and artifitial parameter perturbation of the practical model. It has been used for education in the Modern Control Theory experiment. (P.6)

Real Time Measurement and Dynamic Display System Equipped with Microcomputer for Body Surface Potential Maps

Tan Dongqiang

Real time measurement and dynamic display of body surface potential maps play a important role in solving the inverse problem of electrocardiograph. In this paper a Z-80 microcomputer based system is presented, it enables simultaneous observation of ECG data of 60 lead points in a potential pattern. The instrument is composed of 4 components: a lead electrode system contained 64 electrodes, a analogue signal processing system, a data processing system, a data output, display system. By means of instruction of Z-80 the instrument can store sample data in RAM without DMA method and data processing system bas own complete function.(P.11)

A Microprocessor Instrument for Real-time Marine Heat Flow Measurement

Fang Changle

An RCA microboard computer is used as the controller for a new instrument package for marine heat flow. The use of the microprocessor allows incorporation of