

具有跟踪特性的最小方差自校正控制器*

郑 勤 吴宏鑫

(北京控制工程研究所)

〔提要〕本文提出一种具有跟踪特性的最小方差自校正控制算法。用本算法设计的控制系统，可以得到优于用其他最优算法设计的系统所能得到的跟踪特性，同时又保持了对噪声的最小方差控制能力。此算法适用于任何稳定/非稳定，最小相位/非最小相位系统，也可以认为它是文〔7〕中算法的发展，而具有比文〔7〕中算法更易于设计和更优的跟踪和调节特性。

一 引 言

随着计算机控制技术的迅速发展和应用，用于离散、随机系统的控制算法正受到人们越来越多的重视和研究。在众多的算法中，由于最小方差调节算法^{〔1〕、〔4〕}在稳态时能将干扰对输出的影响减到最小值，从而在实际系统中，特别是过程控制系统中得到了广泛的应用。但众所周知，最小方差调节算法不能应用于跟踪系统，即使是对只需改变工作点的定值控制系统，这类算法往往也不能很好地工作。为此，本文将提出一种具有跟踪特性的最小方差控制算法，该算法结合了最小方差调节算法^{〔4〕}和极点配置控制算法^{〔6〕}的特点，使闭环系统兼有较好的动态控制和稳态调节能力。

二 稳态最小方差调节算法

本节将叙述并证明Peterka^{〔4〕}的稳态最小方差调节算法。Peterka的算法实质上是著名的Åström^{〔1〕}最小方差调节算法的推广，当被控系统是个最小相位系统时，二者是等价的。但对非最小相位系统，Peterka的算法能使系统具有闭环稳定条件下的最小方差输出。

假设被控系统为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-k}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (1)$$

其中 $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}$
 $B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}$
 $C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}$
 q^{-1} 为延迟一步算子， $y(t)$ 为输出量， $u(t)$ 为控制量， $e(t)$ 是方差为 τ^2 ，均值为零的白噪声， $C(q^{-1})$ 稳定， $B(q^{-1})$ 在单位圆上无零点。

为书写简便，下面引进一些符号定义。

对任一多项式

$$d(q^{-1}) = d_0 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d} \quad (2)$$

若 $d_{n_d} \neq 0$ ，则记

$$\tilde{d}(q^{-1}) = \frac{1}{d_{n_d}}q^{-n_d}d(q)$$

若将 $d(q^{-1})$ 分解成稳定部分 $d^+(q^{-1})$ 和不稳定部分 $d^-(q^{-1})$ ，即

$$d(q^{-1}) = d^+(q^{-1})d^-(q^{-1}) \quad (4)$$

则记 $d^*(q^{-1}) = d^+(q^{-1})\tilde{d}^-(q^{-1}) \quad (5)$

显然，若 $d(q^{-1})$ 在单位圆上无零点，则 $d^*(q^{-1})$ 总是稳定的。

定理1 对系统(1)，使闭环系统稳定，且稳态输出方差 $\sigma_y^2 = E\{y^2\}$ 达到最小的最优控制律为

$$F(q^{-1})u(t) = -G(q^{-1})y(t) \quad (6)$$

其中 $F(q^{-1}) = \bar{F}(q^{-1})T(q^{-1}) \quad (7)$

$$G(q^{-1}) = \bar{G}(q^{-1})T(q^{-1}) \quad (8)$$

$T(q^{-1})$ 为任一稳定多项式， $\bar{F}(q^{-1})$ ， $\bar{G}(q^{-1})$ 由下式决定

* 收到本文的时间是1986年7月18日。

$$\begin{aligned} A(q^{-1})\bar{F}(q^{-1}) + q^{-k}B(q^{-1})\bar{G}(q^{-1}) \\ = C(q^{-1})B^*(q^{-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\deg \bar{F}(q^{-1}) = n_b + k - 1$, $\deg \bar{G}(q^{-1}) = \max(n_a - 1, n_c - k)$

证明 对系统 (1), 采用控制律 (8) 后, 闭环方程为

$$\begin{aligned} y(t) = [C(q^{-1})F(q^{-1}) / (A(q^{-1})F(q^{-1}) + \\ + q^{-k}B(q^{-1})G(q^{-1}))]e(t) \\ \triangleq W(q^{-1})e(t) \end{aligned} \quad (10)$$

如闭环是稳定的, 则稳态输出方差为

$$\sigma_y^2 = E\{y_i^2\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c W(z^{-1})W(z) \frac{dz}{z} \quad (11)$$

现对 $W(z)$ 作如下变换

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{C(z)F(z)}{A(z)F(z) + z^k B(z)G(z)} \\ &= \frac{z^k \bar{B}(z)}{\tilde{B}^-(z)} \left(\frac{P(z)}{z^k B^-(z)} + \psi(z) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\psi(z) = \frac{F(z)q(z) + B^+(z)P(z)G(z)}{A(z)F(z) + z^k B(z)G(z)} \quad (13)$$

$p(z)$, $q(z)$ 满足方程

$$A(z)p(z) + z^k B^-(z)q(z) = C(z)\tilde{B}^-(z) \quad (14)$$

$\deg p(z) = n_b + k - 1$, $\deg q(z) = \max(n_a - 1, n_c - k)$, 从而有

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{\bar{B}(z)\bar{B}(z^{-1})}{\tilde{B}^-(z)\tilde{B}^-(z^{-1})} \left(\frac{p(z)}{z^k B^-(z)} + \right. \\ &\quad \left. + \psi(z) \right) \left(\frac{p(z^{-1})}{z^{-k} B^-(z^{-1})} + \psi(z^{-1}) \right) \frac{dz}{z} \\ &= \frac{K}{2\pi j} \left[\oint_c \frac{p(z)p(z^{-1})}{\tilde{B}^-(z)\tilde{B}^-(z^{-1})} + \right. \\ &\quad \left. + \oint_c \bar{\psi}(z)\psi(z^{-1}) \frac{dz}{z} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \oint_c \frac{\tilde{p}(z^{-1})}{\tilde{B}^-(z^{-1})} \psi(z) dz \right] \end{aligned}$$

因 $\psi(z)$ 在单位圆内解析, 所以上式最后一项为

零。又 $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$ 的选取不影响上式中第一项的值, 所以, 如取 $\psi(z) = 0$ 可使 σ_y^2 达最小, 即

$$F(z)q(z) + B^+(z)p(z)G(z) = 0 \quad (16)$$

从而得到: 取 (7), (8) 二式决定的 $F(z)$, $G(z)$ 可满足 (16) 式, 即, 使 σ_y^2 达到最小。同时我们验证, 取 (7), (8) 二式决定的 $F(z)$, $G(z)$ 时, $A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-k}B(q^{-1})G(q^{-1}) = T(q^{-1})B^*(q^{-1})C(q^{-1})$, 即闭环是稳定的。

在定理 1 中, 我们对 Peterka 的原算法作了两点修改: ①在 (7), (8) 二式中, 引入了一稳定多项式 $T(q^{-1})$, 这样为下节推导新算法作了准备; ②在原文中, 最小方差性质是按模型 $y(t) = \frac{q^{-k}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t)$ ($D(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ 稳定) 推导的。对于系统 (1), 其结果是按上述模型取 $D(q^{-1}) = A^*(q^{-1})$ 得到的。作者认为, 当 $A(q^{-1})$ 不稳定时, 这种做法并不严格, 所以在定理 1 中, 我们直接从模型 (1) 出发推导了最小方差的结果。

三 具有跟踪特性的最小方差控制算法

使最小方差调节器具有跟踪特性的问题, 已有许多文章讨论过^[2,3,5]。但以往的做法一般是将参考输入 $y_r(t)$ 引入控制指标函数, 然后选取一控制律, 使这个广义控制指标函数达到最小, 从而达到跟踪 $y(t)$ 的目的。这样做会带来一些问题, 对 ∞ 步最优控制算法^[5], 在计算 t 时刻的控制量时, 需知道 t 时刻以后的 $y_r(t)$ 值, 这势必在算法中对 $y_r(t)$ 要做一些事先的假设, 从而限制了应用范围。同时对控制量取值范围有限的系统, 用最优控制律设计出来的闭环系统的动态特性往往不易做得很好 (即存在加权因子的合理选择问题)。而对于一步最优控制算法^[2], 虽然计算 $u(t)$ 时只需要用到当前的 $y_r(t)$, 但控制指标函数中的各加权系数必须严格选择, 否则很难使系统具有良好

动态特性,甚至会使闭环不稳定。另外,控制量加权项的引入还牺牲了输出方差。

本文中,我们将采用文〔7〕的思路,即将系统的输出分为受噪声干扰引起和跟踪参考输入二部分,对这二部分分别实行最小方差控制和极点配置,从而使系统同时具有较好的抑制干扰和跟踪特性。

在以下的推导中,为书写简便,将省去各多项式中的变量 q^{-1} 。

对于系统(1),如采用控制律

$$Fu(t) = -Gy(t) + G_1y_r(t) \quad (17)$$

(其中 F, G, G_1 是关于 q^{-1} 的三个适当次数的多项式。) 则有闭环方程

$$y(t) = \frac{q^{-k}BG}{AF + q^{-k}BG}y_r(t) + \frac{FC}{AF + q^{-k}BG}e(t) \triangleq y_1(t) + y_2(t) \quad (18)$$

$$u(t) = \frac{AG_1}{AF + q^{-k}BG}y_r(t) - \frac{GC}{AF + q^{-k}BG}e(t) \triangleq u_1(t) + u_2(t) \quad (19)$$

$$\text{其中 } y_1(t) = \frac{q^{-k}BG}{AF + q^{-k}BG}y_r(t) \quad (20)$$

为跟踪参考输入 $y_r(t)$ 的那部分输出;

$$y_2(t) = \frac{FC}{AF + q^{-k}BG}e(t) \quad (21)$$

为受噪声 $e(t)$ 的干扰所引起的那部分输出;

$$u_1(t) = \frac{AG_1}{AF + q^{-k}BG}y_r(t) \quad (22)$$

为跟踪参考输入所需的控制量;

$$u_2(t) = \frac{-GC}{AF + q^{-k}BG}e(t) \quad (23)$$

为克服噪声干扰所需的控制量。

为抑制噪声干扰,应使 $\sigma_{y_2}^2 = E\{y_2^2(t)\}$ 达最小^[4],为使系统具有理想的跟踪特性,应使

$$y_1(t) = \frac{T(1)}{B(1)} \frac{q^{-k}B}{T} y_r(t) \quad (24)$$

成立^[3],其中 T 为由设计者自己选定的多项式。

将(18) — (23)代入(1),得

$$Ay_2(t) = q^{-k}Bu_2(t) + Ce(t) \quad (25)$$

$$Fu_2(t) = -Gy_2(t) \quad (26)$$

由定理1可知,对系统(25)采用控制律(26),如取

$$F = \bar{F}T \quad (27)$$

$$G = \bar{G}T \quad (28)$$

其中 \bar{F}, \bar{G} 满足

$$A\bar{F} + q^{-k}B\bar{G} = B^*C \quad (29)$$

$\deg \bar{F} = n_b + k - 1, \deg \bar{G} = \max(n_a - 1, n_c - k)$ 。

可使稳态时 $\sigma_{y_2}^2 = E\{y_2^2(t)\}$ 达最小。下面选取 G_1 , 使(24)成立。将(27) — (29)代入(20)得

$$y_1(t) = \frac{q^{-k}BG_1}{TCB^*} y_r(t) \quad (30)$$

比较(24)与(30),我们求得

$$G_1 = \frac{T(1)}{B(1)} CB^* \quad (31)$$

1. 显式自校正控制算法

对于参数未知的系统,结合上面的讨论和利用分离性原理,我们可得如下的显式自校正控制算法:

①在时刻 t ,用递推推广最小二乘法辨识系统参数,得估计值 $\hat{A}_t(q^{-1}), \hat{B}_t(q^{-1}), \hat{C}_t(q^{-1})$ 。

②解方程

$$\hat{A}_t(q^{-1})\bar{F}_t(q^{-1}) + q^{-k}\hat{B}_t(q^{-1})\bar{G}_t(q^{-1}) = \hat{B}_t^*(q^{-1})\hat{C}_t(q^{-1}) \quad (32)$$

然后计算

$$F_t(q^{-1}) = \bar{F}_t(q^{-1})T(q^{-1}) \quad (33)$$

$$G_t(q^{-1}) = \bar{G}_t(q^{-1})T(q^{-1}) \quad (34)$$

$$G_{1,t}(q^{-1}) = \frac{T(1)}{\hat{B}_t(1)} \hat{C}_t(q^{-1})B^*(q^{-1}) \quad (35)$$

③计算控制量

$$F_i(q^{-1})u(t) = -G_i(q^{-1})y(t) + G_{1i}(q^{-1})y_r(t) \quad (36)$$

2. 显示自校正控制算法的优点

推导本算法的思路与文〔7〕中算法的思路基本一致。但同文〔7〕中的算法相比,本算法具有以下优点:

①由于最优部分采用了 Peterka 的最小方差控制策略,所以对于非最小相位系统,免去了原算法中的控制量加权因子选择这一麻烦问题,同时还可达到比原算法更小的噪声引起的输出方差。

②在本算法中,特征多项式 $T(q^{-1})$ 是通过反馈回路获得的,而不是象文〔7〕中通过前馈回路获得。这样当系统的控制量取值范围有限制或外界对输出有较大扰动时,本算法跟踪特性要比文〔7〕中的算法好得多。

3. 算法中极点多项式 $T(q^{-1})$ 的选取

$T(q^{-1})$ 的选取是由设计人员按所控对象的具体特性和控制的具体要求决定的,没有一个一般的方法。但对于惯性较大且控制量取值范围有限制的一类定值过程控制系统,我们可以估算出所应配置极点的大致值;如已知系统在工作范围内所能达到的最大惯性量(即加负方向控制量后,输出继续往正方向跑的量)小于 DY ,并要求当 $|y(t) - y_r| < DY$ 时, $y(t)$ 的变化率不大于 ΔY ,则可取 $T(q^{-1}) = 1 - \left(1 - \frac{\Delta Y}{DY}\right)q^{-1}$,这样可保证系统无超调地达到设定值 y_r 。关于 $T(q^{-1})$ 选取的更详细讨论,将在另文中给出。

4. $B(q^{-1})$ 在单位圆上有零点的处理

对 $B(q^{-1})$ 多项式,我们规定它在单位圆上无零点。如实际系统的 $B(q^{-1})$ 在单位圆上有零点,我们可将 $B(q^{-1})$ 的零点往单位圆内移一点后再计算 $B^*(q^{-1})$,这样算法照样可用。另外还需要注意到二点:

①对 $B(q^{-1})$ 多项式,并没规定首项系数

$b_0 \neq 0$,这也就是说算法可适用于时延未知系统。在模型(1)中,引入 q^{-k} 项的目的是为了尽可能地减小 $B(q^{-1})$ 的阶次,从而减少算法的计算量。

②方程(29)有解的充要条件是 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 无不稳定公因子,这个条件比一般的极点配置控制算法要求 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 互质的条件要弱得多,也就是说算法的适用范围比较广。

5. 对算法的计算量评价

本算法的一个缺点是计算量比较大,在每个采样周期内需由 $B(q^{-1})$ 计算 $B^*(q^{-1})$,同时还解一多项式方程(29)。但作者认为这并不影响算法的实用性,原因有二:①随着计算机技术的发展,对于一般的过程控制系统,有足够的时间和内存去进行复杂的运算;②对于一般的实际系统,系统的阶次不会是很高的,这样我们可事先将控制器参数写成系统参数的代数表达式,控制时只需将系统参数代入表达式做几次代数运算即可,所以计算量不成问题。

四 仿真结果

对下述系统进行了仿真实验。

$$\begin{aligned} & (1 - 1.9q^{-1} + 0.9q^{-2})y_i \\ & = q^{-2}(1 + 2q^{-1})u_i + (1 + 0.4q^{-1})e_i \end{aligned} \quad (37)$$

这是一个非最小相位系统,且有一个极点在单位圆上。我们分别从跟踪特性和抑制噪声干扰这两方面考察一下算法在该系统中的应用情况。

首先考察跟踪特性。在实际系统中,控制量 u_i 的取值范围总是有一定的限制的,在这里我们取一种在温控系统中比较常见的情况,限制 $-0.02 \leq u_i \leq 0.1$,即系统具有上升容易下降慢的特性。如取闭环特征多项式 $T(q^{-1}) = 1$,即不配置闭环极点,则得系统跟踪方波信号时输出量曲线和控制量曲线如图1所示。我们看到系统的输出量有很大的超调,为此,我

们利用算法可以配置极点的特性, 取 $T(q^{-1}) = 1 - 0.8q^{-1}$, 以降低输出量的上升速率, 此时系统跟踪方波信号的输入、输出曲线如图2所示, 我们看到系统具有较好的跟踪特性。

下面我们比较一下一般的极点配置自校正算法与本文提出的算法在抑制噪声干扰特性方面的区别。用极点配置方法设置闭环特征方程 $T(q^{-1}) = 1 - 0.8q^{-1}$ 时系统的稳态输出如图3

所示, 其稳态输出方差 $\sigma_y^2 = E\{y_t - y_r\}^2\} = 0.529$ 。采用本文提出的算法设置相同的 $T(q^{-1})$ 得到的稳态输出如图4所示, 其输出方差 $\sigma_y^2 = E\{y_t - y_r\}^2\} = 0.203$, 我们看到算法的最优特性是很明显的。

北京控制工程研究所的屠善澄研究员对本文的写作给予了精心的指导, 在此表示衷心的感谢!

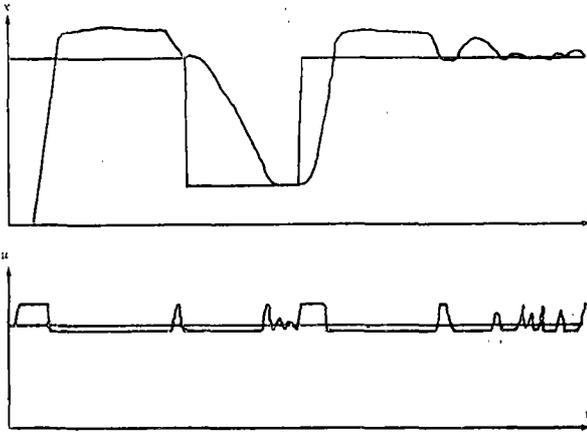


图1 输入与输出

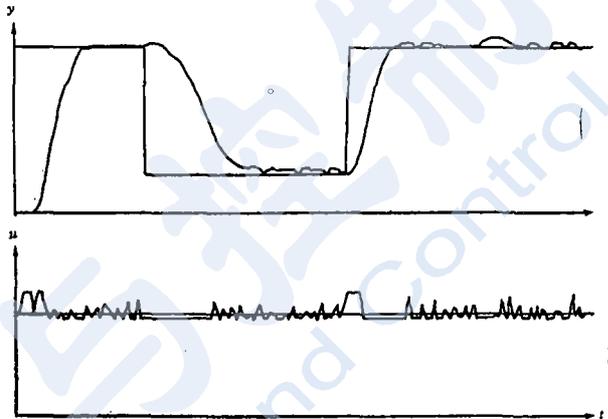


图2 输入与输出

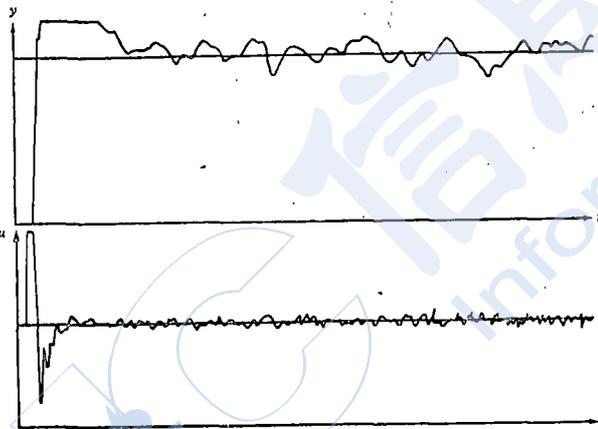


图3 输入与输出

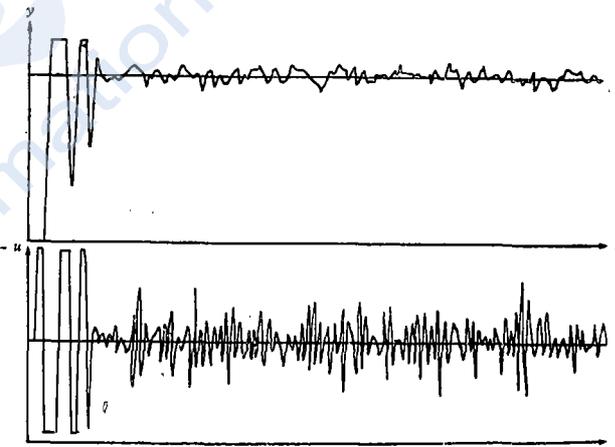


图4 输入与输出

参 考 文 献

- [1] Åström, K.J. and Wittenmark, B. (1973), On Self-tuning Regulator, *Automatica*, 9, 185.
- [2] Clarke, D.W. and Gawthrop, P. J. (1975), Self-tuning Controller, *Proc. IEE*, Pt.D., 122, 929.
- [3] Clarke, D.W. et al. (1985), A Generalized LQG Approach to Self-tuning Control, *Int. J. Control*, 6, 1509.
- [4] Peterka, V. (1972), On Steady State Minimum Variance Strategy, *Kybernetika*, pp. 225~231.
- [5] Peterka, V. (1984), Predictor-based Self-tuning Control, *Automatica*, 1, 39.
- [6] Wellstead, P. E. and Sanaff, S. P. (1981), Extended Self-tuning algorithm, *Int. J. Control*, 34, 423.
- [7] 郑勤, 一种具有抑制噪声性质的极点配置自校正控制器, *信息与控制*, 1985年第3期.

ABSTRACTS

A Minimum-variance Self-tuning Controller with Tracking Property

Zheng Qin Wu Hongxin

This paper proposes a minimum-variance self-tuning control algorithm with tracking property. Closed-loop systems designed with this algorithm can get a better tracking property than that designed with other optimal algorithms, and at the same time, retains the minimum-variance control ability to noises. The algorithm can be applied to any stable/unstable minimum-phase/nonminimum-phase systems. It may be regarded also as a development of the algorithm of (7). This algorithm in comparison with the algorithm of (7) is quite easier to design and has better tracking and regulating characteristics. (p.1)

Optimal Control Theory and Economic Policy Evaluation

Zhou Sifu Lin Dejin Qian Zhenying

This paper derives at first the kernel of optimal control theory—the maximum principle, and explains its two important formulae from the economic point of view. Next, the instability of economic policy and many other problems such as optimum decision in an economic system are discussed. (p.6)

An Energy Saving Control for Current Source Inverter Induction Motor Drive System

Chen Guangdong

This paper proposes an energy saving control mode for current source inverter (CSI) induction motor drive system with the motor driving a constant power load. The emphasis are on control scheme, software and hardware design methods for function generator using single chip microcomputer. The experiment results are given. When motor carries 30% rated load, the system efficiency may raise about 9%. As this control mode only optimizes the relationship between voltage and frequency in an established system, no other circuit is needed in order to maintain the original static and dynamic performance. (p.12)