电阻炉(自然对流式)的数学模型

张忠怀　杨惠卿
(太原工业大学电机系)

〔提要〕 本文研究以自然对流方式工作的电阻炉的数学模型。作者基于两个子空间的观点，提出一种具有变纯滞后时间的二阶非线性模型结构，并通过实时估计和分块辨识的方法确定各个参数模型。实验结果表明，此模型具有较高的精确性和通用性。

在以自然对流方式工作的电阻炉建模过程中，最大的困难在于纯滞后时间 τ 的确定。目前，在有关论述中对模型的纯滞后时间 τ 几乎均采用飞升曲线起始段的等效失灵区大小来表示，而且认为是定常的。作者在〔1〕中为这类电阻炉提出了一种带纯滞后的一阶非线性模型，并在此模型基础上实现了二次型最优控制[1,2]，取得了较好的控制结果。但是，它同样把纯滞后时间 τ 看成为定常的，而且认为从炉丝到被测点之间沿直线方向温度场的分布梯度是连续的。实际上，这类电阻炉炉丝上面通常安有隔板，由于它的存在，沿炉丝到被测点直线方向的温度场的分布梯度不再是连续的，而在隔板处呈现跳变。由于这些因素，使得在实际系统中，温度控制特性在温度梯度变化较激烈的部分偏离理论值，控制器反应不够及时，影响了控制品质。因此，有必要进一步建立更加切合实际的数学模型，特别是确定纯滞后时间 τ 的模型结构。

一　物理模型结构

我们把电阻炉的炉内空间看成为由隔板隔开的两个子空间 A 和 B，分别进行考虑。

首先将炉丝所在的子空间 A 的温度看成为集中在一点的温度用 θ_s 表示。考虑到子空间 A 很小，可以认为 θ_s 的建立是无滞后的，而且可以不考虑从这个空间向炉外散热问题。根据能量平衡方程有：

$$C_s\frac{d\theta_s}{dt}-k'A\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\frac{0.24}{r}u^2 \quad (1)$$

其中 C_s 为子空间 A 的热容；k' 为导热系数；r 为炉丝电阻；A 为炉膛横截面面积；u 为加在炉丝上的电压；x 为从隔板开始沿炉膛方向的距离。

在采用相对温升时，按炉内温度分布方程可以得到

$$\theta=\theta_s\left[1-\frac{1-z}{L}x\right]^2 \quad (2)$$

这里 $z=\sqrt{\theta_L/\theta_s}$，$L$ 为被测点位置。

据此可以求出

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\frac{2\theta_s}{L}\left(1-\sqrt{\frac{\theta}{\theta_s}}\right) \quad (3)$$

将它代入（1）式，并考虑到电阻 r 和导热系数 k' 同温度 θ_s 之间存在如下关系

$$r=a_2+b_2\theta'_s;\quad k'=a'_1+b'_1\theta'_s \quad (4)$$

这里 $\theta'_s=\theta_s+\theta_0$，$\theta_0$ 为室温，可以得到

$$\frac{d\theta_s}{dt}+\frac{1}{C_s}\left(a_1+b_1\theta'_s\right)\theta_s\left(1-\sqrt{\frac{\theta}{\theta_s}}\right)=\frac{0.24u^2}{C_s(a_2+b_2\theta'_s)} \quad (5)$$

其中 $a_1=\frac{2A}{L}a'_1$；$b_1=\frac{2A}{L}b'_1$。

其次，把测量点所在子空间 B 的温度也看成为集中在测量点上的温度。这样根据能量平衡关系有

$$C\frac{d\theta}{dt}+\frac{\theta}{R}=-k'A\left.\frac{\partial\theta(t-\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{6}$$

其中C为子空间B的热容；R为炉壁热阻；τ为纯滞后时间。

考虑到炉壁热阻同温度之间存在关系

$$R=(a_3+b_3\theta')^{-1} \tag{7}$$

这里$\theta'=\theta+\theta_0$，同时考虑（4）式，可以得到

$$\frac{d\theta}{dt}+\frac{1}{C}(a_3+b_3\theta')\theta=\frac{1}{C}[a_1+b_1\theta'_s(t-\tau)]\theta_s(t-\tau)\left[1-\sqrt{\frac{\theta(t-\tau)}{\theta_s(t-\tau)}}\right] \tag{8}$$

选择采样周期$T=\tau/d$，将（5）和（8）式分别离散化，可得到一组方程

$$\theta_s(k+1)=F(k)\theta_s(k)+G(k)u^2(k) \tag{9}$$

$$\theta(k+1)=H(k)\theta(k)+E(k-d)\theta_s(k-d) \tag{10}$$

其中

$$F(k)=1-\frac{T}{C_s}[a_1+b_1\theta_0+b_1\theta_s(k)]\left[1-\sqrt{\frac{\theta(k)}{\theta_s(k)}}\right]=1-\frac{T}{C_s}f(k) \tag{11}$$

$$G(k)=\frac{0.24T}{C_s}[a_2+b_2\theta_0+b_2\theta_s(k)]^{-1}=\frac{T}{C_s}g(k) \tag{12}$$

$$H(k)=1-\frac{T}{C}[a_3+b_3\theta_0+b_3\theta(k)]=1-\frac{T}{C}h(k) \tag{13}$$

$$E(k)=\frac{C_s}{C}[1-F(k)]=\frac{T}{C}f(k) \tag{14}$$

最后，根据热流平衡关系，得到

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=L}-\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L\theta dx \tag{15}$$

这里$a=k'/\rho\cdot C$为气体的热扩散率。

利用（3）式并考虑到$\frac{\partial z}{\partial t}=0$，有

$$\frac{6a}{L^2}\theta_s(1-z)^2=(1+z+z^2)\frac{\partial\theta_s}{\partial t} \tag{16}$$

根据纯滞后τ的定义，由$t\to t+\tau$时，θ不变，得到

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}=-\frac{2\theta_s}{z}\frac{dz}{dt} \tag{17}$$

将它代入（16）式并写成积分形式

$$\int_t^{t+\tau}\frac{3a}{L^2}dt=-\int_{z_0}^{z_L}\frac{1+z+z^2}{z(1-z)^2}dz \tag{18}$$

这里的积分域为

$$z_0=\sqrt{\frac{\theta(t)}{\theta_s(t)}}=z(t);$$

$$z_L=\sqrt{\frac{\theta(t)}{\theta_s(t+\tau)}}=z(t+\tau)。 \tag{19}$$

将（18）式求积并考虑到热扩散率a同温度之间实际上存在的线性关系，可以得到

$$\tau(k)=\frac{1}{a_4+b_4\theta(k)}\left[\frac{3}{1-z(k)}-\frac{3}{1-z(k+d)}+\ln\frac{z(k)}{z(k+d)}\right]$$

$$\theta(k)>0；\ \theta_s(k)>0 \tag{20}$$

二 模型参数的辨识

从（9），（10）式可以得到一个由炉内温度θ和加在炉丝上控制电压u表示的电阻炉数学模型为

$$\theta(k+1)=A_1(k)\theta(k)+A_2(k)\theta(k-1)+B(k)u^2(k-d-1) \tag{21}$$

其中

$$A_1(k)=H(k)+\frac{E(k-d)}{E(k-d-1)}F(k-d-1) \tag{22}$$

$$A_2(k)=-\frac{E(k-d)}{E(k-d-1)}H(k-1)F(k-d-1) \tag{23}$$

$$B(k)=E(k-d)G(k-d-1) \tag{24}$$

因此，参数辨识的任务在于确定 d 及 $A_1(k)$，$A_2(k)$和$B(k)$。

从（11）—（14）式看到系数$A_1(k)$，$A_2(k)$和$B(k)$同样是炉温的非线性函数。为便于利用线性估计方法来确定上述系数模型，采用分块辨识的方法，将全部参数模型归纳为以下五个模块，即

$$g(t)=4.17I/u \tag{25}$$

$$f(\infty)\theta'_s(\infty)=g(\infty)u^2 \tag{26}$$

$$h(\infty)\theta'(\infty)=f(\infty)\theta'_s(\infty) \tag{27}$$

$$C_s\frac{d\theta_s}{dt}+f(t)\theta_s(t)=g(t)u^2(t) \tag{28}$$

$$C\frac{d\theta}{dt}+h(t)\theta(t)=f(t-\tau)\theta_s(t-\tau) \tag{29}$$

通过线性估计求出全部定常系数$a_1 \sim a_3$；$b_1 \sim b_3$ 以及 C和 C_s 从而建立起实时计算的参数模型。根据参数模型运用加权广义最小二乘参数估计算法，对模型结构参数 d 进行辨识，得到的结果如表 1 。

表 1

	阶数	残差平方和	残差平均值
$d=0$	1	22.5849473	0.0688565465
	2	7.87754522	0.0241642491
	3	18.0084539	0.0555816477
$d=1$	1	27.1345501	0.082727287
	2	7.37522528	0.0226233904
	3	59.2746095	0.182946326
$d=2$	1	43.1104021	0.132240497
	2	15.3022144	0.046939307
	3	161.7455322	0.493126622

从表 1 的数据结果可以看到：① 按两个子空间概念建立的二阶模型结构是正确的；② 纯滞后的拍数 $d=1$。因此，我们可以对以自然对流式工作的电阻炉的数学模型作如下结论：

1. 如果令$x_1(k)=\theta_s(k)$；$x_2(k)=\theta(k)$；$\nu(k)=u^2(k)$，则可以用如下状态方程表示

$$x_{k+1}=A_k x_k+B_k\nu(k) \tag{30}$$

其中

$$x_k^T=[x_1(k),\ x_2(k),\ x_3(k)] \tag{31}$$

$$A_k=\begin{pmatrix} F(k) & 0 & 0 \\ 0 & H(k) & 1 \\ E(k) & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad B_k=\begin{pmatrix} G(k) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

2. 如果令 $y(k)=\theta(k)$；$\nu(k)=u^2(k)$，则可以用如下差分方程来表示

$$y(k)=A_1(k)y(k-1)+A_2(k)y(k-2)+B(k)\nu(k-3) \tag{33}$$

其中

$$A_1(k)=H(k)+\frac{E(k-1)}{E(k-2)}F(k-2) \tag{34}$$

$$A_2(k)=-\frac{E(k-1)}{E(k-2)}H(k-1)F(k-2) \tag{35}$$

$$B(k)=E(k-1)G(k-2) \tag{36}$$

三 结束语

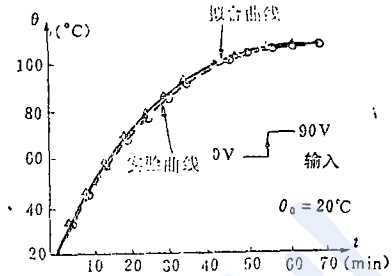
1. 按两个子空间的设想建立的模型结构不仅适用于有隔板的情况，对无隔板情况也同样适用。表 2 的数据提供了当加热体安在炉内侧壁而且无隔板时的辨识结果。数据表明由（33）式表示的数学模型在这种情况下同样是正确的。

2. 由（11）—（14）式计算$F(k)$,$G(k)$,$H(k)$和$E(k)$时不仅需要实时值 $\theta(k)$，而且还需要知道$\tau(k)$，因而 τ 只能通过迭代循环计算方法来确定，很容易证明，只要满足$z(k)<1$条件，迭代循环计算总是收敛的。

表 2

	阶 数	残 差 平 方 和	残 差 平 均 值
$d=0$	1	1821.51935	13.0108525
	2	17.5726407	0.125518862
	3	36.1494597	0.258210426
$d=1$	1	24.990156	0.178501115
	2	16.43328	0.117380906
	3	20.7021889	0.14782778
$d=2$	1	23.4403277	0.167430912
	2	19.5328812	0.13952058
	3	342.402285	2.445730607

3．利用上述模型结构对 4kVA实验炉进行校验，作出的动态拟合曲线和实验曲线比较见右图。



参 考 文 献

〔1〕张忠怀，电阻炉温度的最优控制，信息与控制，1984年第5期。
〔2〕张忠怀，采用 DDP 方法的电阻炉温度最优控制，太原工业大学学报，1985年第2期。
〔3〕Karlekar，B.V.，Desmond，R.M.，工程传热学，人民教育出版社，1983年。
〔4〕Eckert，E.R.G.，Drake R.M.，传热与传质分析，科学出版社，1972年。
〔5〕卢桂章等，现代控制理论基础，上册，化学工业出版社，1981年。

（上接第41页）

punov, Riccati and Other Matrix Equations, Int. J. Control, Vol.32, No.6, 1980.
〔14〕姜长生，Riccati和Lyapunov矩阵代数方程解的一种简便快速算法，控制理论与应用，Vol.2，No.3，1985
〔15〕吕炯兴，关于矩阵方程 $AX-XB=C$ 的解，南京航空学院科技报告，NHJB-85-2635，待发表，1985.
〔16〕Smith, R.A., Matrix Equation $XA+BX=C$, SIAM. J. Appl, Vol.16, No.1, 1968.
〔17〕Davison, E.J., The Numerical Solution of $\dot{X}=A_1X+XA_2+D$, $X(0)=C$, IEEE, Vol. AC-20, No.4, 1975.
〔18〕Икрамов, Х.Д., Численное Решение Мтричных Управнений, Москва НАУКА, 1984.
〔19〕Rothschild, D. and Jameson, A., Comparison of Four Numerical Algorithms for Solving the Lyapunov Matrix Equation, Int. J. Control, Vol.11, No.2, 1970.
〔20〕旺纳姆，W.M.，姚景尹、王恩平译，线性多变量控制，一种几何方法，科学出版社，1984.
〔21〕Hoskins, W.D., Meek, D.S. and Walton, D.J., The Numerical Solution of $\dot{X}=A_1X+XA_2+D$, $X(0)=C$, IEEE, Vol. AC-22, No.10, 1977.
〔22〕Barraud, A.Y., A New Numerical Solution of $\dot{X}=A_1X+XA_2+D$, $X(0)=C$, IEEE, Vol. AC-22 No.11, 1977.
〔23〕Lacoss, R.T. and Shakal, A.F., More $A_1E+EA_2=-D$ and $\dot{X}=A_1X+XA_2+D$, $X(0)=C$, IEEE, Vol. AC-21, No.6, 1976.
〔24〕曹志浩，实矩阵特征值排序的直接算法，高等学校计算数学学报，Vol.3，No.1，1981.
〔25〕Davison, E.J. and Man, F.T., The Numerical Solution of $A^TQ+QA=-C$, IEEE, Vol. AC-13, No.4, 1968.
〔26〕Wang Jiwen and Chen Chi-tsong, On the Computation of Characteristic Polynomial of a Matrix, IEEE, Vol. AC-27, No.2, 1982.
〔27〕姜长生，控制系统中的矩阵方程的数值解，全国第五届系统仿真学术会议文集（四），1985.（内部资料）
〔28〕谢如彪、杜子华，矩阵指数计算方法综述——关于MCSCAD-SJD 系统之六，上海交通大学科技交流室，1982.10.（内部资料）