第 25 卷第 1 期
1996 年 2 月

信 息 与 控 制
Information and Control

Vol. 25, No. 1
Feb., 1996

自适应状态和参数的联合估计新方法

周 露 吴瑶华 闻 新
(哈尔滨工业大学航天学院 150006)

摘 要 提出了一种有效的自适应状态和参数的联合估计方法. 应用状态空间方法和现代时间序列分析方法[1], 基于白噪声滤波器和输出预报器, 给出了线性离散定常系统自适应最优状态和偏差联合估计方法, 仿真例子说明了新方法的有效性.

关键词 状态估计, 参数估计, 稳态最优滤波, 自适应滤波

1 引言

60 年代, 当 Kalman 滤波器出现后, Jazwinsky 提出了将未知参数作为扩充状态与状态同时进行估计[2]的方法, 然而, 这种方法对参数的估计常常是有偏或发散的, 因此本文给出了一种有效地避免有偏或发散的状态和偏差联合估计方法.

考虑线性离散定常系统

$$x_{k+1} = \Phi x_k + Bb + \Gamma_1 w_k \tag{1}$$

$$y_k = H_1 x_k + v_k \tag{2}$$

其中 x_k 为 n 维状态向量, y_k 为 m 维观测向量, b 为 p 维系统偏差, w_k 为 r 维模型噪声, v_k 为 m 维测量噪声, w_k, v_k 为相互独立的零均值白噪声序列, 且方差分别为 Q_w 和 Q_v. Φ, B, Γ_1, H_1 是已知的适当维数矩阵.

当噪声方差 Q_w, Q_v 已知时, 最优滤波问题是基于观测 $\{y_k, \cdots, y_0\}$, 求状态和偏差的最优估值 $\hat{x}_{k|k}, \hat{b}_{k|k}$.

自适应滤波问题是当噪声方差 Q_w, Q_v 未知时, 基于观测 $\{y_k, \cdots, y_0\}$, 求状态和偏差的渐近最优滤波.

2 稳态最优滤波器

设 $z = [x^{\mathrm{T}}, b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 代入(1), (2)式得

$$z_{k+1} = F z_k + \Gamma w_k \tag{3}$$

$$y_k = H z_k + v_k \tag{4}$$

其中, $F = \begin{bmatrix} \Phi & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H = [H_1 \quad 0]$, 且 F 为 $(n+p) \times (n+p)$ 阵.

很明显, 系统(3), (4)是不可控的, 当 b 的维数大于状态 x 的维数时, 系统(3), (4)又不能完全可观测. 根据(3), (4)式, 利用推广 Kalman 滤波方法估计时, 常常得到有偏或发散的结果, 为了解决这一问题, 采用下述方法来处理[3]. 设

$$b_{k+1} = b_k + \Gamma_2 \eta_k \tag{5}$$

式中 b_k 为 b 的第 k 次迭代所得的估计值, η_k 为随机噪声, Γ_2 为噪声项的系数矩阵.

1994－08－15 收稿

当 b_k 收敛于 b 时，$\eta_k\approx 0$.

设 $z_k=[x_k^{\mathrm T},b_k^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$，可得

$$z_{k+1}=Fz_k+\Gamma\xi_k \tag{6}$$

$$y_k=Hz_k+v_k \tag{7}$$

式中，$F=\begin{bmatrix}\Phi & B\\ 0 & I\end{bmatrix}$，$\Gamma=\begin{bmatrix}\Gamma_1 & 0\\ 0 & \Gamma_2\end{bmatrix}$，$H=[H_1\ \ 0]$，$\xi_k=\begin{bmatrix}w_k\\ \eta_k\end{bmatrix}$，且 $\mathrm E(\eta_k)=0$，$\mathrm E(\xi_k)=0$，$\mathrm E[\eta_k\,\eta_j^{\mathrm T}]=Q_\eta\delta_{kj}$，$\mathrm E[\xi_k\,\xi_j^{\mathrm T}]=\begin{bmatrix}Q_w & 0\\ 0 & Q_\eta\end{bmatrix}\delta_{kj}=Q_\xi\delta_{kj}$，$\mathrm E[\xi_k\,v_j^{\mathrm T}]=\begin{bmatrix}0\\ S_1\end{bmatrix}\delta_{kj}=S\delta_{kj}$. δ_{kj}是 Kronecker 符号.

假设系统(6)，(7)是完全可观，完全可控的．因而，状态和偏差稳态最优滤波问题归结为：当噪声方差 Q_ξ,Q_v,S 已知时，基于观测$\{y_k,\cdots,y_0\}$，求状态最优估值 $\hat z_{k|k}$.

自适应滤波问题归结为：当噪声方差 Q_ξ,Q_v,S 未知时，基于观测$\{y_k,\cdots,y_0\}$，求状态渐近最优滤波 $\hat z_{k|k}$.

由(6)，(7)式迭代有

$$\begin{bmatrix}H\\ HF\\ \vdots\\ HF^{n+p-1}\end{bmatrix}z_k=\begin{bmatrix}y_k-v_k\\ y_{k+1}+H\Gamma\xi_k-v_{k+1}\\ \vdots\\ y_{k+n+p-1}-\sum_{i=0}^{n+p-2}HF^{n+p-2-i}\Gamma\xi_{k+i}-v_{k+n+p-1}\end{bmatrix} \tag{8}$$

取 $M=[H^{\mathrm T},F^{\mathrm T}H^{\mathrm T},\cdots,(F^{n+p-1})^{\mathrm T}H^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$. 由该系统是可观测假设知，$M$ 是列满秩矩阵，即

$$\operatorname{rank} M=n+p$$

由(8)式及射影理论得稳态最优滤波器为

$$\hat z_{k|k}=M^{\#}\begin{bmatrix}y_k-\hat v_{k|k}\\ \hat y_{k+1|k}-H\Gamma\hat\xi_{k|k}\\ \vdots\\ \hat y_{k+n+p-1|k}-HF^{n+p-2}\Gamma\hat\xi_{k|k}\end{bmatrix} \tag{9}$$

这里，$\hat\xi_{k|k}=\begin{bmatrix}0\\ \hat\eta_{k|k}\end{bmatrix}$，$M^{\#}=(M^{\mathrm T}M)^{-1}M^{\mathrm T}$.

由(9)式知，只要求得白噪声滤波器和输出预报器，便可得到稳态最优滤波器.

由(6)，(7)有稳态 Kalman 预报器存在

$$\hat z_{k+1|k}=F\hat z_{k|k-1}+K\varepsilon_k \tag{10}$$

$$y_k=H\hat z_{k|k-1}+\varepsilon_k \tag{11}$$

其中 K 是稳态预报器增益阵，ε_k 是均值为零、协方差为 Q_ε 的白噪声新息序列.

由(10)，(11)式有

$$y_k=H(I-q^{-1}F)^{-1}K\varepsilon_{k-1}+\varepsilon_k \tag{12}$$

设 F 的最小多项式为 $A^*(q)=q^s+a_1q^{s-1}+\cdots+a_s$，则有推广的矩阵求逆 Fadeeva 公式为

$$(I-q^{-1}F)^{-1}=\sum_{i=0}^{s-1}F_iq^{-i}\Big/\sum_{i=0}^{s}a_iq^{-i} \tag{13}$$

其中 $a_0=1$，且系数阵 F_i 可递推计算为

$$F_i=FF_{i-1}+a_iI_{n+p},\quad F_0=I,\quad i=1,2,\cdots,s-1 \tag{14}$$

当 $s=n$ 时，系数 a_i 可递推计算为

$$a_i = (-1/i)\mathrm{tr}(FF_{i-1}), \quad i = 1,2,\cdots,s \tag{15}$$

将(13)式代入(12)式有 ARMA 新息模型为

$$A(q^{-1})y_k = D(q^{-1})\varepsilon_k \tag{16}$$

其中

$$D(q^{-1}) = I + D_1q^{-1} + \cdots + D_sq^{-s}$$

$$D_i = HF_{i-1}K + a_iI_m, \quad i = 1,2,\cdots,s \tag{17}$$

$$A(q^{-1}) = q^{-s}A^*(q) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_sq^{-s} \tag{18}$$

可以证明，$D(q^{-1})$是稳定的. $D(q^{-1})$的稳定性保证了 $D(q^{-1})$的唯一性，即 $D(q^{-1})$的可辨识性[4].

由(16)式及射影性质有稳态最优递推预报器 $\hat{y}_{k+i|k}$为

$$A(q^{-1})\hat{y}_{k+i|k} = D_i(q^{-1})\varepsilon_{k+i} \tag{19}$$

其中，$D_i(q^{-1})=D_iq^{-i}+\cdots+D_{n+p}q^{-(n+p)}$，且

$$A(q^{-1})\hat{y}_{k+i|k} = \hat{y}_{k+i|k} + a_1\hat{y}_{k+i-1|k} + \cdots + a_s\hat{y}_{k+i-s|k} \tag{20}$$

由(6)，(7)式有

$$y_k = H(I - q^{-1}F)^{-1}\Gamma\xi_{k-1} + v_k \tag{21}$$

将(13)式代入(21)式有

$$A(q^{-1})y_k = C(q^{-1})\xi_{k-1} + A(q^{-1})v_k \tag{22}$$

其中，$C(q^{-1})=C_0+C_1q^{-1}+\cdots+C_{s-1}q^{-(s-1)}$，$C_i=HF_i\Gamma$，$i=0,\cdots,s-1$.

由(16)，(22)式有

$$D(q^{-1})\varepsilon_k = C(q^{-1})\xi_{k-1} + A(q^{-1})v_k \tag{23}$$

由(23)式，并利用射影公式有

$$\hat{\xi}_{k|k} = \sum_{i=0}^{k}\mathrm{E}[\xi_k\varepsilon_{k-i}^{\mathrm{T}}]Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon_{k-i} = SQ_\varepsilon^{-1}\varepsilon_k \tag{24}$$

类似有

$$\hat{v}_{k|k} = Q_vQ_\varepsilon^{-1}\varepsilon_k \tag{25}$$

3　自适应滤波器

当噪声统计 Q_ξ，Q_v，S 未知时，为了实现自适应滤波器，要求估计 Q_ξ，Q_v，S.

记(23)式两边的滑动平均过程为

$$\gamma_k = D(q^{-1})\varepsilon_k = C(q^{-1})\xi_{k-1} + A(q^{-1})v_k \tag{26}$$

计算 γ_k 的相关函数 $\mathrm{E}[\gamma_k\gamma_{k-i}^{\mathrm{T}}]$有矩阵代数方程组

$$\sum_{j=i}^{s}D_jQ_\varepsilon D_{j-i}^{\mathrm{T}} = \sum_{j=i}^{s-1}C_jQ_\xi C_{j-i}^{\mathrm{T}} + Q_v\sum_{j=i}^{s}a_ja_{j-i} + \sum_{j=i}^{s}C_{j-1}Sa_{j-i} + \sum_{j=i}^{s}a_{j-i}S^{\mathrm{T}}C_{j-1}, \quad i = 0,1,\cdots,s-1 \tag{27}$$

$$D_sQ_\varepsilon = Q_va_s + C_{s-1}S, \qquad i = s \tag{28}$$

由(27),(28)式可计算出 Q_ξ, Q_v, S.

自适应滤波器由如下两步组成.

第1步　用递推增广最小二乘法(RELS)在线辨识ARMA新息模型(16)式,可得参数阵 D_i 在时刻 k 的估值 $\hat{D}_i(k)$,新息 ε_k 的估值可由(16)式递推计算为 $\hat{\varepsilon}_k = y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_s y_{k-s} - \hat{D}_1(k)\hat{\varepsilon}_{k-1} - \cdots - \hat{D}_s(k)\hat{\varepsilon}_{k-s}$,而 Q_ε 的估值 $\hat{Q}_\varepsilon$ 可由采样方差阵递推计算为

$$\hat{Q}_\varepsilon(k) = \hat{Q}_\varepsilon(k-1) + \frac{1}{K}(\hat{\varepsilon}_k\hat{\varepsilon}_k^T - \hat{Q}(k-1))$$

第2步　将有关估值代入(27),(28),(24),(25),(19),(9)式可先后得估值 $\hat{Q}_\xi, \hat{Q}_v, S, \hat{\xi}_{k|k}, \hat{v}_{k|k}, \hat{y}_{k+i|k}, \hat{z}_{k|k}$.

上述两步在每时刻 k 重复进行.

在一定条件下[5],参数估值是一致的,即当 $k\to\infty$ 时,$\hat{D}_i(k)\to D_i(i=1,2,\cdots,s)$,因而自适应滤波器 $\hat{z}_{k|k}$ 将渐近于稳态最优滤波器(9)式.

4　仿真例子

考虑单输入单输出系统(1),(2)式及(5)式

$$x_{k+1} = \Phi x_k + Bb + \Gamma_1 w_k$$

$$y_k = H_1 x_k + v_k$$

$$b_{k+1} = b_k + \Gamma_2 \eta_k$$

其中,$\Phi=\begin{bmatrix}0.98 & 1\\ 0 & 0.95\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix}$, $\Gamma_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $H_1=[1\quad 0]$, $b=1$, $\Gamma_2=1$, $b_0=1$, $x_k=(x_{1k}, x_{2k})^T$ 且未知方差 $Q_w=1$, $Q_v=0.5^2$, $Q_\eta=0.01^2$, $S=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$. 递推步数 $k=300$,仿真结果如图1至图3所示. 图1为状态 x_{1k} 和自适应滤波 $\hat{x}_1(k|k)$. 图2为状态 x_{2k} 和自适应滤波 $\hat{x}_2(k|k)$. 图3为偏差 b_k 和自适应滤波 $\hat{b}(k|k)$. 可以看到自适应滤波具有良好的性能. 图1~图3中,——代表状态和偏差的真实值,……代表状态和偏差的自适应滤波值.

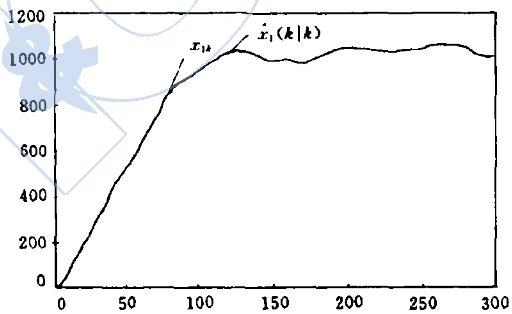

图1　状态 x_{1k} 和自适应滤波 $\hat{x}_1(k|k)$

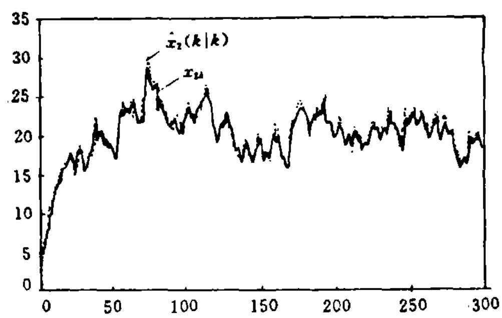

图2　状态 x_{2k} 和自适应滤波 $\hat{x}_2(k|k)$

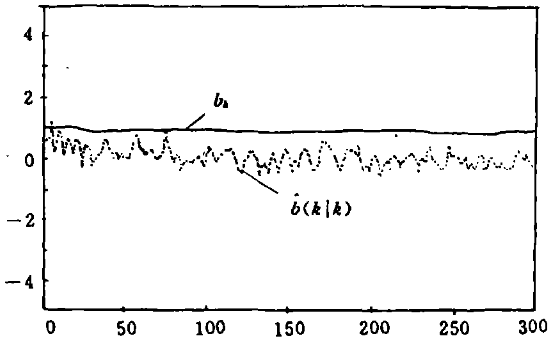

图 3 偏差 b_k 和自适应滤波 $\hat{b}(k|k)$

参 考 文 献

1 邓自立,郭一新.现代时间序列分析及其应用.北京:知识出版社,1989

2 Jazwinski A H. Stochastic Processes and Filter Theory. New York and London: Academic Press, 1970: 266~329

3 史忠科.状态和参数联合估计方法及其在飞行试验中的应用.自动化学报,1993,3(2):218~222

4 Box G E P, Jenkins G M. Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, San Fransisco, 1976

5 Panuska V. A New Form of the Extended Kalman Filter for Parameter Estimation in Linear System with Correlated Noise. IEEE Trans Automat Contr, 1980, AC-25: 229~235

A NEW APPROACH FOR THE ADAPTIVE ESTIMATING BOTH THE STATE AND PARAMETERS

ZHOU Lu WU Yaohua WEN Xin

(*College of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150006)

Abstract An efficient approach for the adaptive estimation of both the state and unknown parameters is presented in the paper. Using the state space method and the modern time series analysis method, based on white noise filter and output predictors, this paper presents a new approach for solving adaptive optimal estimation of both the state and bias. The simulation example shows its usefulness.

Key words state estimation, parameter estimation, steady-state optimal filter, adaptive filter

作者简介

周 露,女,30岁,博士.研究领域为自适应滤波,飞行器系统辨识与参数估计以及自适应控制等.

吴瑶华,女,68岁,副博士,博士导师.研究领域为飞行器建模,系统辨识与参数估计,空间飞行器力学与控制等.

闻 新,男,32岁,博士.研究领域为故障诊断与容错控制,工业过程控制及飞行器控制与制导等.