鲁棒输出反馈控制器设计

宋申民* 褚东升** 彭晓红*

*(哈尔滨工业大学控制工程系 哈尔滨 150001) **(青岛海洋大学)

摘 要 研究了满足匹配条件的不确定线性系统鲁棒输出反馈控制器的设计问题. 首先推导了受约束 Lyapunov 问题的两个构造性结论, 基于此, 给出输出反馈控制器的设计方法. 最后的算例表明了该方法的有效性. *

关键词 不确定系统, 匹配条件, 输出反馈

1 引言及问题描述

不确定系统的输出反馈镇定是鲁棒控制领域中的一个难题. 近十多年来, 不少作者致力于不确定系统输出反馈控制的研究[1~3]. 文[1]用变结构控制方法, 给出匹配及不匹配系统切换性控制. 文[2][3]研究了非线性不确定系统的闭环鲁棒稳定, 利用了系统正实的概念而不是 Lyapunov 稳定性原理. 本文对于满足匹配条件的不确定系统, 应用受约束 Lyapunov 问题(CLP)的两个结论, 给出系统输出反馈一个简单实用的控制方式, 使得闭环系统 Lyapunov 稳定. 最后给出实际设计的一个实例.

考虑线性时变不确定系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(r(t))]x(t) + [B + \Delta B(s(t))]u(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in R^m$ 为控制变量, $y(t) \in R^q$ 为输出向量. 假设系统可变参数向量 $r(t)$, $s(t)$ 均为 Lebesyue 可测的, 且 $r(t) \in \Phi$, $s(t) \in \Psi$, 其中 Φ 和 Ψ 为 R^n 中有界紧集, (A, B) 可控. 且 $q \geq m$. 假设存在连续矩阵函数 $D(\cdot)$ 及 $E(\cdot)$, 使得系统的不确定性满足如下的匹配条件

$$\Delta A(r) = BD(r), \quad \forall r \in \Phi \tag{2}$$

$$\Delta B(s) = BE(s), \quad \forall s \in \Psi \tag{3}$$

$$2I + E(s) + E^{\mathrm{T}}(s) > 0, \quad \forall s \in \Psi \tag{4}$$

本文的目的是设计如下形式的控制器

$$u(t) = -\alpha K^{\mathrm{T}} y(t), \quad \alpha > 0 \tag{5}$$

使系统(1)闭环鲁棒稳定. 对此, 我们将寻求矩阵 $K^{\mathrm{T}}C$ 与 $B^{\mathrm{T}}P$(P 为适当维数的矩阵)之间的联系以利用匹配条件. 首先研究受约束 Lyapunov 问题, 给出两个必要的结论.

2 受约束的 Lyapunov 问题

给定矩阵 $M \in R^{n \times n}$, $\Gamma \in R^{l \times n}$; $\mathrm{rank}\Gamma = l \times n$. $\Sigma \in R^{n \times k}$; $\mathrm{rank}\Sigma = K < n$ 以及矩阵 $W \in R^{n \times (n-l)}$ 满足下面关系

$$\Gamma W = 0 \text{ 且 } W^{\mathrm{T}} W = I(\text{单位矩阵}) \tag{6}$$

* 1995-09-24 收稿

受约束 Lyapunov 问题(CLP): 如果存在矩阵 $\pi \in R^{n\times n}$, $K \in R^{k\times l}$ 满足下式

$$\pi = \pi^{T} > 0 \tag{7}$$

$$W^{T}(M^{T}\pi + \pi M)W < 0 \tag{8}$$

$$\pi^{-1}P^{T} = \Sigma K \tag{9}$$

则称CLP 问题可解, (π, K) 称为解对. 对于 CLP 的可解性有如下的两个定理.

定理 1 　假定 $l = K$, CLP 问题可解当且仅当

① $\mathrm{rank}\,\Gamma\Sigma = K$

② 矩阵 $A_{*} = W^{T}[M^{T} - M^{T}\Gamma^{T}\Gamma\Sigma(\Sigma^{T}\Gamma^{T}\Gamma\Sigma)^{-1}\Sigma^{T}]W$ 是一个稳定矩阵.

证明　必要性. 令(π, K) 为CLP 问题的解对. 由于秩 Σ= 秩 $\Gamma = K$, 由(9) 式, 显然K 可逆. 由于 $\pi > 0$, 所以 $\mathrm{rank}\Gamma\Sigma = \min\{l, K\} = l = K$, 于是$(\Gamma\Sigma)^{-1}$存在. 由(9) 式, 并注意到 $\Gamma W = 0$, 因此下式成立

$$\Sigma^{T}\pi W = (K^{-1})^{T}\Gamma W = 0 \tag{10}$$

注意到矩阵$[W\ \Gamma^{T}]$可逆, 令

$$\tilde{\pi} \triangleq [W\Gamma^{T}]^{-1}T[W^{T}\Gamma^{T}]^{-1} \tag{11}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_{11} & \tilde{\pi}_{12} \\ \tilde{\pi}_{21} & \tilde{\pi}_{22} \end{bmatrix} \tag{12}$$

显然 $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}^{T} > 0$, 由(11) 式及(12) 式可知

$$\pi = W\tilde{\pi}_{11}W^{T} + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_{22}\Gamma + W^{T}\tilde{\pi}_{12}\Gamma + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_{21}W^{T} \tag{13}$$

如下定义矩阵 $\tilde{\pi}_{0} \in R^{l\times(n-l)}$

$$\tilde{\pi}_{0} \triangleq \tilde{\pi}_{21}\tilde{\pi}_{1}^{-1} \tag{14}$$

于是由(13) 式及(14) 式可得

$$\pi = W^{T}\tilde{\pi}_{11}W^{T} + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_{22}\Gamma + W\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_{0}^{T}\Gamma + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_{0}\tilde{\pi}_{11}W^{T} \tag{15}$$

根据(10) 及(15) 式, 并注意到 $W^{T}W = I$, 于是可得

$$\Sigma^{T}\pi W = (\Sigma^{T}W + \Sigma^{T}\Gamma^{T}\tilde{\pi}_{0})\tilde{\pi}_{11} = 0 \tag{16}$$

由(12) 式可知 $\tilde{\pi}_{11}$非奇异, 由上式可得

$$\tilde{\pi}_{0}^{T} = -W^{T}\Sigma(\Gamma\Sigma)^{-1} \tag{17}$$

将 π 及 $\tilde{\pi}_{0}$代入(8) 式中, 有

$$W^{T}(M^{T}\pi + \pi M)W = [W^{T}M^{T}W - W^{T}M^{T}\Gamma^{T}(\Sigma^{T}\Gamma^{T})^{-1}\Sigma^{T}W]\tilde{\pi}_{11} + \tilde{\pi}_{11}[W^{T}MW - W^{T}\Sigma(\Gamma\Sigma)^{-1}\Gamma MW] = A_{*}\tilde{\pi}_{11} + \tilde{\pi}_{11}A_{*}^{T} < 0$$

由 Lyapunov 定理可知, A_{*} 矩阵为稳定矩阵.

充分性. 选取矩阵 $\tilde{\pi}_{11} \in R^{(n-k)\times(n-k)}$, 使得

$$\tilde{\pi}_{11} = \tilde{\pi}_{11}^{T} > 0$$

$$A_{*}^{T}\tilde{\pi}_{11} + \tilde{\pi}_{11}A_{*} < 0$$

定义矩阵 $\tilde{\pi}_{0} \in R^{k\times(n-k)}$

$$\tilde{\pi}_{0} = -(\Sigma^{T}\Gamma^{T})^{-1}\Sigma^{T}W \tag{18}$$

选取矩阵 $\tilde{\pi}_{22} \in R^{k\times k}$, 使得 $\tilde{\pi}_{22} = \tilde{\pi}_{22}^{T} > 0$, 且使矩阵 $\tilde{\pi}$ 正定.

$$\tilde{\pi} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_{11} & \tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_{0}^{T} \\ \tilde{\pi}_{0}\tilde{\pi}_{11} & \tilde{\pi}_{22} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$K \triangleq \Sigma^{T}(W\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T} + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_{22}) \tag{20}$$

$$\pi \triangleq (W\Gamma^{T}]\tilde{\pi}[W\Gamma^{T}]^{T} \tag{21}$$

由于 $\mathrm{rank}\Sigma\Gamma = K$，可知 $[W\ \ \Gamma^{T}]$ 可逆，$\pi = \pi^{T} > 0$.

由(18)，(19)及(21)式可知

$$\Sigma^{T}\pi\Gamma^{T} = \Sigma^{T}(W\tilde{\pi}_{11}W^{T} + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_{22}\Gamma + W\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T}\Gamma + \Gamma^{T}\tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11}W^{T})\Gamma^{T} =$$

$$\Sigma^{T}(\Gamma^{T}\tilde{\pi}_{22}\Gamma + W\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T}\Gamma)\Gamma^{T} = K\Gamma\Gamma^{T} \tag{22}$$

$$\Sigma\pi W = (\Sigma^{T}W + \Sigma\Gamma\tilde{\pi}_0)\tilde{\pi}_{11} = -[\Sigma^{T}W - \Sigma^{T}\Gamma^{T}(\Sigma^{T}\Gamma^{T})^{-1}\Sigma^{T}W]\tilde{\pi}_{11} = 0 \tag{23}$$

由于 $[W\ \ \Gamma^{T}]$ 可逆，根据(22)及(23)式可得

$$\pi^{-1}\Gamma^{T} = \Sigma K$$

由(18)，(19)及(21)式可得

$$W^{T}(M^{T}\pi + \pi M)W = [W^{T}M^{T}W - W^{T}M^{T}\Gamma^{T}(\Sigma^{T}\Gamma^{T})^{-1}\Sigma^{T}W]\tilde{\pi}_{11} +$$

$$\tilde{\pi}_{11}[W^{T}MW - W^{T}\Sigma(\Gamma\Sigma)^{-1}\Gamma MW] = A_{*}\tilde{\pi}_{11} + \tilde{\pi}_{11}A_{*}^{T} < 0$$

从而CLP问题可解，(π, K) 为其解对. 证毕.

定理 2 假定 $l < K$，选取满秩矩阵 $\Lambda \in R^{k\times(k-l)}$ 使得

$$\Gamma\Sigma\Lambda = 0 \tag{24}$$

如下定义矩阵 $A_1 \in R^{(n-l)\times(n-l)}$，$B_1 \in R^{(n-l)\times(k-l)}$，$C_1 \in R^{l\times(n-l)}$

$$A_1 = W^{T}MW - W^{T}\Sigma\Sigma^{T}\Gamma^{T}(\Gamma\Sigma\Sigma^{T}\Gamma^{T})^{-1}\Gamma MW \tag{25}$$

$$B_1 = W^{T}\Sigma\Lambda \tag{26}$$

$$C_1 = \Gamma MW \tag{27}$$

则CLP问题可解当且仅当存在矩阵 $K_1 \in R^{(k-l)\times l}$ 使得 $A_1 - B_1K_1C_1$ 为一稳定矩阵.

证明 我们只进行充分性证明，必要性类同定理1.

充分性. 如果存在矩阵 K_1 使 $A_1 - B_1K_1C_1$ 为一稳定矩阵，令

$$\bar{A}_1 \triangleq A_1 - B_1K_1C_1 \tag{28}$$

选取矩阵 $\tilde{\pi}_1 \in R^{(n-l)\times(n-l)}$，$\tilde{\pi}_{11} = \tilde{\pi}_1^{T} > 0$，使得

$$\bar{A}_1^{T}\tilde{\pi}_{11} + \tilde{\pi}_{11}\bar{A}_1 < 0 \tag{29}$$

选取矩阵 $R_1 \in R^{l\times l}$，$R_1 = R_1^{T} > 0$，如下定义矩阵

$$K = \Lambda K_1\Gamma\Sigma\Sigma^{T}\Gamma^{T}R_1\Gamma\Sigma\Sigma^{T}\Gamma^{T} + \Sigma^{T}\Gamma^{T}R_1\Gamma\Sigma\Sigma^{T}\Gamma^{T} \tag{30}$$

$$\tilde{\pi}_0^{T} = -W^{T}\Sigma K(\Gamma\Sigma K)^{-1} \tag{31}$$

$$\tilde{\pi}_{22} = (I - \tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11}W^{T}\Sigma K)(\Gamma\Sigma K)^{-1} \tag{32}$$

$$\tilde{\pi} = \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T} \\ \tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11} & \tilde{\pi}_{22} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\pi = [W\ \ \Gamma^{T}]\tilde{\pi}[W\Gamma^{T}]^{T} \tag{34}$$

则矩阵 $\tilde{\pi}_{22}$ 为正定对称矩阵. π 为对称矩阵. 由于 $\tilde{\pi}_{22} - \tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T} = (\Gamma\Sigma K)^{-1} > 0$，因此 $\tilde{\pi}$ 为正定对称矩阵，且 π 为正定对称矩阵. 且由 π 的定义可得

$$W^{T}(M^{T}\pi + \pi M)W = (A_1 - B_1K_1C_1)^{T}\tilde{\pi}_{11} + \tilde{\pi}_{11}(A_1 - B_1k_1C_1) < 0$$

由于 $\Gamma W = 0$ 且 $W^{T}W = I$，根据(13)及(31)式可知

$$\Gamma\pi\Sigma K = \Gamma\Gamma^{T}(\tilde{\pi}_{22}\Gamma + \tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11}W^{T})\Sigma K = \Gamma\Gamma^{T}[(\Gamma\Sigma K)^{-1} - \tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T}]\Gamma\Sigma K +$$

$$\Gamma\Gamma^{T}\tilde{\pi}_0\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T}\Gamma\Sigma K = \Gamma\Gamma^{T}$$

$$W^{T}\pi\Sigma K = W^{T}(W\tilde{\pi}_{11}W^{T} + W\tilde{\pi}_{11}\tilde{\pi}_0^{T}\Gamma)\Sigma K$$
$$= \tilde{\pi}_{11}(W^{T}\Sigma K + \tilde{\pi}_0\Gamma\Sigma K) = 0 \tag{35}$$

由上式知 $\pi^{-1}\Gamma^{T} = \Sigma K$, 综上所述, 可知 CLP 问题可解.

3　输出反馈控制器设计

选取矩阵 $\theta \in R^{n\times(n-m)}$ 使得

$$B^{T}\theta = 0,\ \theta^{T}\theta = I \tag{36}$$

对于不确定系统(1), 构造如下的 CLP 问题

$$M = A^{T};\ \Gamma = B^{T};\ \Sigma = C^{T};\ W = Q \text{ 且 } l = m,\ K = q \tag{37}$$

根据 CLP 问题的可解性, 有下述主要结论.

定理 3　设不确定线性系统(1)满足匹配条件(2)～(4), (37)式所描述的 CLP 问题存在解对(π, K), 则存在常数 $\alpha > 0$, 使得不确定系统(1)在输出反馈控制(5)作用下闭环鲁棒稳定.

证明　令 $p = \pi^{-1}$, 取 Lyapunov 函数 $v(x) = x^{T}px$, 沿系统(1)的轨线对 $v(x)$ 求导得

$$\dot{v}(x) = x^{T}[A^{T}p + pA + p\Delta A(r) + \Delta A^{T}(r)p]x + u^{T}(t)[B^{T}p + \Delta B^{T}(s)p]x + x^{T}(pB + p\Delta B(s)]u(t)$$

由匹配条件将(5)式代入上式得

$$\dot{v}(x) = x^{T}[A^{T}p + pA + pBD + (pBD)^{T} - \alpha(pB + pBE)K^{T}C - \alpha C^{T}K(B^{T}p + E^{T}B^{T}p)]x$$

由于 CLP 问题(37)可解, 根据定理 1, 2 可知 $\pi^{-1}\Gamma^{T} = \Sigma K$, 即 $pB = C^{T}K$, 由匹配条件可知

$$\dot{v}(x) \le x^{T}[A^{T}p + pA - \xi pBB^{T}p + \frac{1}{r_c}D^{T}(r)D(r)]x$$

其中 $\xi = \alpha\delta - r_c$, $r_c > 0$ 为任选常数. 由于 $A^{T}p + pA$ 及 $\frac{1}{r_c}D^{T}(r)D(r)$ 均为对称矩阵, $\mathrm{rank}B = m$, 则存在 $\xi > 0$, 使

$$A^{T}p + pA - \xi pBB^{T}p + \frac{1}{r_c}D^{T}(r)D(r) < 0$$

即存在 $\alpha > 0$ 使 $\dot{v}(x) < 0$. 由稳定性理论可知不确定系统(1)在反馈(5)作用下闭环鲁棒稳定.

4　设计算例

不确定线性系统可以用(1)式描述, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_1(t) & r_2(t) & r_3(t) \end{bmatrix}$$

$$B = [0\ 0\ 1]^{T},\quad \Delta B = [0\ 0\ 0]^{T},\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

不确定性 $r_1(t)$, $r_2(t)$ 及 $r_3(t)$ 满足如下关系

$$\Phi = \{(r_1, r_2, r_3)\ \ r_i \le 1,\ \ i = 1, 2, 3\}$$

依(37)式构造 CLP 问题如下:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad p = [0\ 0\ 1], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这里 $l = 1$，$K = 2$. 由于 $\mathrm{rank}\,\Gamma\Sigma = 1$，选取矩阵 $\Lambda = [1\ 0]^{T}$，使得 $\Gamma\Sigma\Lambda = 0$，由定理 2 可得

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0\ 1]$$

显然 $K_1 = 1$ 可以使 $A_1 - B_1K_1C_1$ 为稳定矩阵. 选取 $\tilde{\pi}_{11}$ 为

$$\tilde{\pi}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

取 $R_1 = 1$，由(30)式可得 $K^{T} = [1\ 1]$. 由(31),(32)及(34)式得到

$$\tilde{\pi}_0 = (-2\ -2), \quad \tilde{\pi}_{22} = 5$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

考虑到不确定性 Φ，根据定理 3，取如下控制

$$u(t) = -2.1[y_1(t) + y_2(t)]$$

则该不确定系统对于所有容许不确定性均闭环鲁棒稳定.

参 考 文 献

1 Emelyanov S V, *et al*. Discontinuous Output Feedback Stabilizing an Uncertain MIMO Plant. Int J of Control, 1992, **55** (1): 83～107

2 Steinberg A, Corless M. Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems. IEEE Trans, 1985, **AC-30** (10): 1025～1027

3 Qu Z. Global Stabilization of Nonlinear Systems with a Class of Unmatched Uncertainties. Systems & Control Letters, 1992, **18**: 301～307

ON THE DESIGN OF ROBUST OUTPUT FEEDBACK CONTROL

*SONG Shenmin **CHU Dongsheng **PENG Xiaohong

*(*Harbin Institute of Technology*) **(*Ocean University of Tsingdao*)

Abstract This paper addresses design problem of robust output feedback controller for uncertain linear system with matched conditions. Firstly, it derives two constructed theorems of constrained Lyapunov problem. On the basis of this, the paper presents the design method of output feedback controller. Final example illustrates effectiveness of this method.

Key words uncertain linear system, matched condition, output feedback

作者简介

宋申民，28 岁，博士生. 研究领域为最优控制，大系统理论及鲁棒控制.

褚东升，40 岁，博士，副教授. 研究领域为系统辨识，鲁棒控制等.

彭晓红，28 岁，博士. 研究领域为稳定性理论，不确定系统鲁棒控制等.