

# 基于小波零树结构的一种图像压缩

陈红卫<sup>1</sup>, 张焕春<sup>1</sup>, 黄国建<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学测试工程系, 江苏 南京 210016; 2. 江苏科技大学电子信息学院电子与信息系, 江苏 镇江 212003)

**摘要:** 本文分析了图像小波分解系数的特点及零树结构, 提出了一种基于小波零树结构的图像压缩编码方法, 描述了小波图像矩阵及多分辨率、多方向的矩阵元素, 给出了求取每个子带中最大绝对值小波系数及忽略此子带引起的均方误差计算公式, 定义了编码结构, 并用 Lena 图对该编码方法进行仿真实验. 仿真结果与 EZW 编码方法进行比较, 结果表明: 此方法在相同的 PSNR 下, 获得了较高压缩比, 具有较好性能.\*

**关键词:** 图像压缩; 编码; 小波变换; 零树

中图分类号: TP391

文献标识码: A

## An Image Compression Based on Wavelet Zerotree

CHEN Hong-wei<sup>1</sup>, ZHANG Huan-chun<sup>1</sup>, HUANG Guo-jian<sup>2</sup>

(1. Department of Test Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)

**Abstract:** An image compression method based on the features of image wavelet decomposition coefficient and zerotree structure is proposed in this paper. The matrix of wavelet image and the multiresolution matrix elements are depicted too. The encoding structure and the expressions which calculate the maximal absolute value of each subband wavelet coefficient and the mean square error ignoring this subband are given. With a Lena image of  $512 \times 512 \times 8$ , the simulation is carried out. The results are compared with those of EZW. With the same peak signal to noise ratio (PSNR), this method gains obviously higher compression ratio and has better performance.

**Keywords:** image compression; encoding; wavelet transform; zerotree

## 1 引言 (Introduction)

图像压缩编码是数字图像技术走向实用化的关键技术之一. 它研究用尽量少的数据尽可能不失真地表示图像, 同时能根据实际需要, 获取重构图像. 从信息论观点看, 描述数字图像的数据包含信源熵和冗余信息, 压缩编码就是去冗余保留信源熵. 从数学角度看, 数字图像是一个多维函数, 压缩编码就是为了描述这个多维函数的数据之间的相关性.

小波变换因其良好的空间-频率局部特性和与人眼视觉特性相符的变换机制, 成为当前图像压缩编码的主要研究方向之一. 小波变换将图像分解成与人类视觉特性相匹配的不同分辨率、不同方向特性的子带, 并使大部分能量集中于 LL 低频带中, 为小波变换图像压缩编码提供了基础. 对一般图像而言, 高频带中的图像边缘、轮廓信息分布是无序的, 很难用一种固定的方式编码, 因此研究小波图像高

频带系数的有效组织和编码方法, 是小波变换编码的关键技术之一<sup>[1]</sup>. 本文在分析图像小波分解系数特点及零树编码基础上, 提出了一种改进压缩编码方法, 同时描述了小波图像矩阵及多分辨率、多方向的矩阵元素, 给出了求取每个子带内最大绝对值小波系数及忽略此子带引起的均方误差计算公式, 定义了编码结构, 并用 Lena 图对该编码方法进行了仿真实验, 仿真结果与 EZW 编码作了比较.

## 2 小波系数及零树结构 (Wavelet coefficient and zerotree structure)

### 2.1 图像小波系数

图像可用二维矩阵表示, 根据 Mallat S 的塔式分解算法<sup>[2]</sup>, 把低通滤波器  $L$  和高通滤波器  $H$  分别作用于图像的行和列, 经一次小波变换图像分割成四个部分: 低频部分 LL、水平部分 HL、垂直部分 LH 和对角部分 HH, 其低频部分 LL 可继续再分解, 直

至分解级数满足要求为止. 图 1(a) 是 Lena 原图像. 图 1(b) 是该图像经 Harr 小波三次分解后小波系数组成的图像, 称小波图像. 从图 1(b) 中可以看出最低频部分保留了图像的近似信息, 集中了大部分能量, 高频部分体现了图像的细节, 保留了部分能量. 一幅  $N \times N$  的图像经  $n$  级小波变换后得到的小波系数组成的矩阵记为  $W$ , 排列形式见式(1); 其中  $HL_j$ 、

$LH_j$ 、 $HH_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 的尺寸为  $N/2^j \times N/2$ , 最低频  $LL_n$  的尺寸为  $l \times l$ , 其中  $l = N/2^n$ . 小波变换具有良好的空间方向选择性, 符合人眼视觉特性, 图像小波分解后的近似信息由  $LL_n$  体现, 水平方向的边缘、轮廓和纹理等信息由各高频子带  $HL_j$  体现, 垂直方向的边缘、轮廓和纹理等信息由  $LH_j$  体现, 对角方向的边缘、轮廓和纹理等信息由  $HH_j$  体现.

$$W = \begin{bmatrix} LL_n & HL_n & \dots & HL_j & \dots & HL_1 & \dots \\ LH_n & HH_n & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & HH_j & \vdots & \vdots & \vdots \\ LH_j & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & HH_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ LH_1 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1)$$

如果矩阵中坐标  $(x, y)$  处的小波系数用  $c(x, y)$  表示, 那么各子带中最大绝对值小波系数可由式(2)求出, 忽略此子带引起的均方误差由式(3)求出.

表 1 给出了 256 灰度等级  $512 \times 512$  大小的 Lena 图像经 Harr 小波 6 级分解后每个子带的最大绝对值小波系数, 及忽略该子带引起的均方误差.



图 1 (a) Lena 原图像

图 1(b) 三级小波分解后的 Lena 图像

Fig. 1 (a) Original image of Lena

Fig. 1 (b) Lena image after three scale wavelet decomposition

表 1 最大绝对值小波系数与均方误差

Tab. 1 Maximal absolute value of wavelet coefficient and the mean square error

水平方向	HL6	HL5	HL4	HL3	HL2	HL1
$HL_{j \max}$	1310	1263	552	367	217	91
$MSE_{erHL_j}$	82.6	78.5	47.5	36.3	22.7	13.2
垂直方向	LH6	LH5	LH4	LH3	LH2	LH1
$LH_{j \max}$	2957	1443	917	617	285	118
$MSE_{erLH_j}$	341.9	190.0	161.8	94.3	54.7	28.2
对角方向	HH6	HH5	HH4	HH3	HH2	HH1
$HH_{j \max}$	1704	742	426	215	109	40
$MSE_{erHH_j}$	70.9	41.2	31.4	16.9	9.2	4.0
低频部分 LL6						
$LL_{n \max}$	11188			$MSE_{erLL_n}$	10775	

$$\left\{ \begin{aligned} LL_n \max &= \max_{1 \leq x \leq l} \left\{ \max_{1 \leq y \leq l} (|c(x, y)|) \right\} \\ HL_j \max &= \max_{1 \leq x \leq 2^{(n-j)}l} \left\{ \max_{2^{(n-j)}l+1 \leq y \leq 2^{(n-j+1)}l} (|c(x, y)|) \right\} \\ LH_j \max &= \max_{2^{(n-j)}l+1 \leq x \leq 2^{(n-j+1)}l} \left\{ \max_{1 \leq y \leq 2^{(n-j)}l} (|c(x, y)|) \right\} \\ HH_j \max &= \max_{2^{(n-j)}l+1 \leq x \leq 2^{(n-j+1)}l} \left\{ \max_{2^{(n-j)}l+1 \leq y \leq 2^{(n-j)}l} (|c(x, y)|) \right\} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} MSE_{\sigma LL_n} &= \frac{\sum_{x=1}^l \sum_{y=1}^l |c(x, y)|^2}{N^2} \\ MSE_{\sigma HL_j} &= \frac{\sum_{x=1}^{2^{(n-j)}l} \sum_{y=2^{(n-j)}l+1}^{2^{(n-j+1)}l} |c(x, y)|^2}{N^2} \\ MSE_{\sigma LH_j} &= \frac{\sum_{x=2^{(n-j)}l+1}^{2^{(n-j+1)}l} \sum_{y=1}^{2^{(n-j)}l} |c(x, y)|^2}{N^2} \\ MSE_{\sigma HH_j} &= \frac{\sum_{x=2^{(n-j)}l+1}^{2^{(n-j+1)}l} \sum_{y=2^{(n-j)}l+1}^{2^{(n-j+1)}l} |c(x, y)|^2}{N^2} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

## 2.2 小波零树结构

小波变换对整幅图像的能量进行了重新分配, 采用适当的方法组织小波系数可实现图像的高效编码, 达到压缩的目的. Shapiro 提出的零树编码方法<sup>[3]</sup>是目前小波图像标量量化编码中组织小波系数最有效的方法之一<sup>[4-6]</sup>.

图像经小波分解后, 相同方向上不同分辨率的变换系数具有很强的相关性, 各系数间存在着天然的塔式数据结构, 根据小波分解后图像的多分辨率表示特点, 对低频子图像中的某一点而言, 与其对应的具有相同空间位置的高频子图像中的点称为它的子孙, 从小波图像的低频层开始依照子孙关系延伸, 得到树形结构. 若图像经  $n$  层小波分解得到的小波系数矩阵  $W$ , 对于系数  $c(x, y) \in W$ , 定义<sup>[7]</sup> 其子节点集合  $S_{\text{child}}(c(x, y))$  如下:

当  $c(x, y) \in LL_n$  时,  $S_{\text{child}}(c(x, y)) = \{c(x+l, y), c(x, y+l), c(x+l, y+l)\}$

当  $c(x, y) \in \{HL_n, LH_n, HH_n, \dots, HL_2, LH_2, HH_2\}$  时,  $S_{\text{child}}(c(x, y)) = \{c(2x-1, 2y-1), c(2x-1, 2y), c(2x, 2y-1), c(2x, 2y)\}$

当  $c(x, y) \in \{HL_1, LH_1, HH_1\}$  时,  $S_{\text{child}}(c(x, y)) = \phi$

对于给定的阈值  $T$ , 若小波系数的绝对值大于等于  $T$ , 即  $|c(x, y)| \geq T$ , 则称  $c(x, y)$  为重要系数; 正数值的重要系数, 称为正重要系数, 记成 POS, 负

数值的重要系数, 称为负重要系数, 记成 NEG; 若  $|c(x, y)| < T$ , 且它的子孙  $|S_{\text{child}} c(x, y)| < T$ , 则称形成了一棵“零树”, 称其父系数  $c(x, y)$  为零树根, 记成 ZTR; 零树根以下的点均看成零点, 记成 Z; 若  $|c(x, y)| < T$ , 但它的子孙中  $\exists |S_{\text{child}} c(x, y)| \geq T$ , 则称其父系数  $c(x, y)$  为孤零点, 记成 IZ. 经过定义, 图像小波系数均可记成 POS、NEG、ZTR、Z、IZ 之一.

## 3 编码方法(Encoding methods)

### 3.1 理论基础

小波零树编码的理论基础是统计概率, 假设  $c(x, y)$  是不重要系数, 那么  $c(x, y)$  对应的子孙为不重要系数的概率非常大. 记住零树根的位置, 就可以忽略零树根以下的零点, 从而达到压缩的目的. 形成零树的棵数越多, 零树根出现越早, 编码效率越高.

### 3.2 编码算法

首先对图像进行  $n$  级小波变换, 由小波系数组成矩阵  $W$ , 求出最低频  $LL_n$  部分矩阵的行、列长度, 由此计算出  $HL_j$ 、 $LH_j$ 、 $HH_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 部分矩阵的行、列长度.

其次计算初始阈值  $T_0 = 2^{\log_2 \max}$ , 其中  $\max$  为最大绝对值小波系数. 按照压缩比和失真率折衷的原则求取量化层数  $k$ , 在初始阈值的基础上, 计算不同量化层的系列阈值  $T(i) = T_0(1/2)^i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, k$ ).

按“Zig”扫描顺序, 根据零树结构和已计算的各量化层上的阈值定义小波系数, 形成符号编码, 一次扫描完成符号编码, 对已形成的符号编码再进行 Huffman 编码. 定义为重要系数的 POS 或 NEG 需加标识量化层序号和量化值, 形成细节编码. 为提高编码效率, 扫描范围的大小由  $HL_j$ 、 $LH_j$ 、 $HH_j$  三个方向分别处理, 若忽略某一高分辨率部分系数时, 引起的均方误差在指定的范围内, 则可略去此部分, 即该部分用全 0 处理, 缩小扫描范围, 缩短待编码内容.

解码时先置大小相同的全 0 矩阵, 再严格按照扫描顺序, 重构重要系数, 正确填入矩阵, 得到小波系数矩阵, 最后逆变换小波系数即得恢复图像.

### 3.3 编码结构

本算法采用二层结构: 第一层定义不同阈值下小波系数, 用符号表示, 符号的编码值由哈夫曼编码决定; 第二层是对重要系数进行标识量化层编码和数值量化编码, 采用标量量化, 标识  $LL_n$  部分量化层

的编码位数  $bit\_len1$  如式(4), 式中  $m_1$  是该部分所有系数已定义的量化层数; 标识  $HL_j$ 、 $IH_j$ 、 $HH_j$  部分量化层的编码位数  $bit\_len2$  如式(5), 式中  $m_2$  是该部分所有系数中有重要系数存在的量化层数. 数值量化编码位数  $bit\_len3(i)$  如式(6), 系数  $c(x, y)$  的数值编码  $code$  如式(7), 重构系数  $c'(x, y)$  绝对值如式(8).

$$bit\_len1 = \text{Ceiling}(\log_2(m_1)) \quad (4)$$

$$bit\_len2 = \text{Ceiling}(\log_2(k - m_2)) \quad (5)$$

$$bit\_len3(i) = \log_2(T(i)/err) \quad (6)$$

$$err = T_0/2^k$$

$$code = \text{dec2bin}(\text{floor}(|c(x, y) - T(i)|/err), bit\_len3(i)) \quad (7)$$

$$|c'(x, y)| = \text{bin2dec}(code) \times err + T(i) + err/2 \quad (8)$$

### 3.4 编码算法实现

由原始图像到压缩后产生码流的流程如图 2 所示. 利用式(4)、(5) 计算  $bit\_len1$ 、 $bit\_len2$  时用到  $m_1$  及  $m_2$  值.

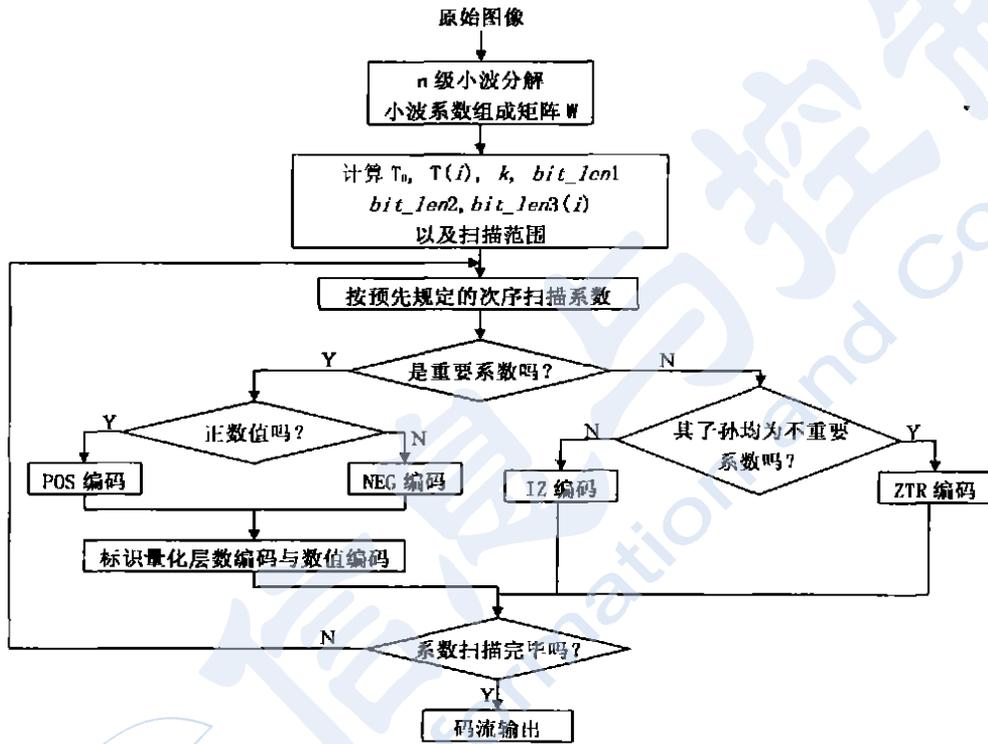


图 2 流程图

Fig. 2 Flow chart

求  $m_1$  的伪码如下:

```

{
  m1 = 0
  while i < k
    if min(min(abs(LLn))) < T(i)
      m1 = m1 + 1
    else
      break
  end
  i = i + 1
end
}

```

求  $m_2$  的伪码如下:

```

{
  m2 = 0
  while i < k
    if max(max(abs(IHj, HLj, HHj))) <

```

```

T(i)
m2 = m2 + 1
else
  break
end
i = i + 1
end
}

```

## 4 实验结果及分析(Experimental results and analysis)

本算法用 256 灰度等级  $512 \times 512$  大小的 Lena 图经 Harr 小波 6 级分解后组成的小波图像进行仿真实验, 表 2 给出了相同 PSNR 下本算法与 EZW 算法的压缩比, 从中可以看出在相同 PSNR 下, 本算法

的压缩比提高了. 在图像的低比特率编码中, 用于表示非零系数所在位置的开销远大于用来表示非零系数数值的开销<sup>[8]</sup>, 本算法的宗旨是减少表示位置信息的编码长度. 用一次扫描完成系数的定义, 减少了表示位置信息的编码长度, 但需要增加表示标识量化层的编码, 充分利用小波系数的特点, 如最低频部分的小波系数在阈值较大的几层中量化, 高频部分在某一阈值后才有需要量化的值存在, HH1 部分能量非常小等, 减少的编码长度超过增加的编码长度, 性能提高.

表 2 相同 PSNR 下本文算法与 EZW 算法的压缩比

Tab. 2 Compression ratio of algorithm under the same PSNR

PSNR (dB)	EZW 算法时压缩比	本文算法时压缩比
25.4	100:1	107:1
28.1	40:1	43:1
31.3	17:1	20:1
35.0	8:1	11:1

## 5 结论 (Conclusion)

小波变换因其良好的空间—频率局部特性和与人眼视觉特性相符的变换机制, 在图像压缩编码中得到广泛应用. 小波零树编码是小波图像标量量化编码中最有效的方法之一, 但在低比特率编码中, 表示位置信息的编码比重较大, 文中讨论的算法利用系统阈值一次完成了小波系数的编码, 大大节省了

表示位置信息的编码, 算法充分利用小波系数的特点, 使标识量化层的编码增加相对较小, 提高编码性能.

## 参 考 文 献 (References)

- [1] 沈兰荪, 卓力, 田 栋, 等. 视频编码与低速率传输 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [2] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674~ 693.
- [3] Shapiro J.M. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3445~ 3462.
- [4] 杨云峰, 苏志勋, 钟似玢. 一种改进的基于小波零树的图像编码算法 [J]. 中国图象图形学报 A, 2001, 6(A)(6): 542~ 546.
- [5] Ramaswam V.N., Ranganathan N., Namuduri K.R. Performance analysis of wavelets in embeded zerotree based lossless image coding schemes [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(3): 884~ 889.
- [6] 周建鹏, 杨义先. 一种基于小波变换的低比特率混合图像编码方法 [J]. 电子学报, 1999, 27(2): 126~ 128.
- [7] 张海翔, 陈 纯, 庄越挺. 基于单队列递归扫描的嵌入式零树图像编码方法 [J]. 中国图象图形学报 A, 2002, 7(A)(7): 709~ 715.
- [8] 王 琪, 钟玉琢. 一种结合量化的零树小波图像编码器 [J]. 清华大学学报, 2000, 40, (7): 109~ 111.

## 作者简介

陈红卫(1966-), 女, 副教授, 博士研究生. 研究领域为计算机应用技术, 图像压缩编码技术.

