线性离散系统稳定化控制器的统一代数刻划

王子栋 郭 治
(南京理工大学自动控制系 210094)

摘 要 本文研究稳定离散控制系统的代数结构问题,即期望给出线性离散系统稳定化状态反馈控制器的统一代数刻划.本文结果对离散状态反馈控制系统的设计具有理论指导意义,同时也提供了线性稳定系统结构分析的一种新方法.

关键词 线性离散系统,状态反馈,广义逆理论,代数刻划

1 引言

状态反馈控制系统的研究一直是系统理论及工程设计中的重要课题,涌现出大量成果.文献[1-6]研究了线性系统的拓扑性质,文献[7]探讨了线性连续状态反馈系统的几何结构,但有关线性离散状态反馈系统结构研究方面的成果却几乎未见报道.

本文利用广义逆理论,给出了所有使线性定常离散系统稳定的状态反馈控制器的统一代数刻划,从而为离散稳定系统的结构分析提供了一种具有理论指导意义的新方法,并说明了该方法在实际工程控制系统设计中的应用可能.文中给出了相应的数值例子.

2 问题的描述及引理

考虑如下多变量线性定常系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1}$$

其中状态变量 $x(k)\in R^n$,控制变量 $u(k)\in R^m$,(A,B)可稳,A,B 为适维定常矩阵.

状态反馈控制律为

$$u(k) = Gx(k) \tag{2}$$

则闭环系统成为

$$u(k) = (A+BG)x(k) \tag{3}$$

定义 1 设(A,B)可稳,若 $A+BG$ 稳定(即其极点均位于单位圆内),则称 G 为关于(A,B)的稳定化状态反馈控制器,其全体的集合记为 $\mathscr{S}(A,B)$.

本文的目的在于给出集合 $\mathscr{S}(A,B)$的统一代数刻划,为此,需要如下引理.

引理 1[8] 矩阵 A 稳定(即 A 的极点均在单位圆内),当且仅当存在正定阵 $P>0$ 满足

$$P - APA^{T} > 0 \tag{4}$$

引理 2[9] 设 $B^+\in R^{m\times n}$为 B 的 Moore-Penrose 广义逆,则 B^+具有如下性质:BB^+及 $I-BB^+$均为对称阵,且有 $BB^+B=B$,$B^+BB^+=B^+$,$B^TBB^+=B^T$.

引理 3[9] 设 $B_1\in R^{n\times m}$,$B_2\in R^{p\times q}$,$B_3\in R^{n\times q}$,则线性矩阵方程

$$B_1XB_2 = B_3$$

本项研究得到高等学校博士学科点专项科研基金及国防科工委预研基金资助.
1995—01—30 收稿

有解 X 当且仅当

$$B_1B_1^+B_3B_2^+B_2 = B_3 \tag{4}$$

且若(4)满足，则所有的解可表示为

$$X = B_1^+B_3B_2^+ - (Z - B_1^+B_1ZB_2B_2^+)$$

其中 $Z\in R^{n\times p}$为任意矩阵.

引理 4[10]　设 $A\in R^{m\times n}$,$B\in R^{m\times p}(m\leqslant p)$,则存在矩阵 V 同时满足

$$AV = B,\quad VV^{\mathrm{T}} = I$$

当且仅当

$$AA^{\mathrm{T}} = BB^{\mathrm{T}}$$

此时,V 的通解可表示为

$$V = V_A\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}V_B^{\mathrm{T}},\quad U\in{}^{(n-r_A)\times(p-r_A)},\quad UU^{\mathrm{T}} = I$$

其中 V_A,V_B 分别来自于如下 A,B 的奇异值分解

$$A = U_A\begin{bmatrix} \Lambda_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_A^{\mathrm{T}} = [\,U_{A1}\,U_{A2}\,]\begin{bmatrix} \Lambda_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{A1}^{\mathrm{T}} \\ V_{A2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$B = U_B\begin{bmatrix} \Lambda_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_B^{\mathrm{T}} = [\,U_{B1}\,U_{B2}\,]\begin{bmatrix} \Lambda_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{B1}^{\mathrm{T}} \\ V_{B2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

这里 $r_A=\mathrm{rank}A$,$U_B=U_A$,$\Lambda_B=\Lambda_A$.

3　主要结果及证明

据引理 1,本文的目的在于对给定的可稳对(A,B),寻找所有的控制器 G,使如下代数矩阵不等式

$$X - (A + BG)X(A + BG)^{\mathrm{T}} > 0 \tag{5}$$

有正定解 $X>0$. 为叙述方便,我们给出如下定义.

定义 2　若存在控制器 G,使(5)式有给定正定解 $X>0$,则称该 X 是可配置的.

下面主要解决两个问题:(1)正定阵 X 可配置的充要条件是什么?(2)若正定阵 X 可配置,则相应的控制器 G 的一般表达式是什么?

定理 1　正定阵 $X>0$ 可配置,当且仅当

$$[F^{\mathrm{T}}(AXA^{\mathrm{T}} - X)F]_{22} < 0 \tag{6}$$

其中$[\cdot]_{11}$,$[\cdot]_{12}$,$[\cdot]_{21}$,$[\cdot]_{22}$为$[\cdot]$的分块阵,分别具有维数 $m\times m$,$m\times(n-m)$,$(n-m)\times m$,$(n-m)\times(n-m)$;F 为乘积 BB^+的酉模态阵,B^+为 B 的 Moore-Penrose 广义逆.

必要性的证明:

若 X 可配置,则存在 G,使离散 Lyapunov 方程

$$X = (A + BG)X(A + BG)^{\mathrm{T}} + Q \tag{7}$$

成立,其中 $Q>0$.

令 $X=SS^{\mathrm{T}}$,$X-Q=TT^{\mathrm{T}}$,S,$T\in R^n$,则(7)式成为

$$[(A + BG)S][(A + BG)S]^{\mathrm{T}} = TT^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

据引理 4,(8)式成立当且仅当存在正交阵 V 使

$$(A + BG)S = TV$$

或

$$BG = TVS^{-1} - A \tag{9}$$

再据引理 3，(9)式有解 G 当且仅当

$$(I - BB^{T})(TVS^{-1} - A) = 0$$

或

$$(I - BB^{T})TV = (I - BB^{+})AS \tag{10}$$

由引理 4，上式成立等价于

$$[(I - BB^{+})T][(I - BB^{-})T]^{T} = [(I - BB^{+})AS][(I - BB^{-})AS]^{T}$$

或

$$(I - BB^{+})(AXA^{T} - X + Q)(I - BB^{-}) = 0 \tag{11}$$

令 F 为 BB^{+} 的酉模态阵，从而有

$$FF^{T} = F^{T}F = I, F^{T}BB^{+}F = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F^{T}(I - BB^{-})F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

则(11)式等价于

$$F^{T}(I - BB^{-})FF^{T}(AXA^{T} - X + Q)FF^{T}(I - BB^{-})F = 0 \tag{12}$$

(12)式又可写为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}[F^{T}(AXA^{T} - X + Q)F]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} = 0$$

或

$$[F^{T}(AXA^{T} - X + Q)F]_{22} = 0 \tag{13}$$

而 $Q>0$，故有(6)式成立.

充分性的证明：

若(6)式成立，则 $R_{22} \triangleq -[F^{T}(AXA^{T} - X)F]_{22} > 0$，为此，我们选择

$$Q = F\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{12}^{T} & R_{22} \end{bmatrix}F^{T} \tag{14}$$

其中 $\hat{Q}_{11}, \hat{Q}_{12}$ 为使得 $Q>0$ 且 $Q \leqslant X$ 的任意矩阵. 则易见(13)式成立，从而(11)式成立，故存在正交阵 V 使(10)成立，或存在 G 使(9)，以及(8)成立，则有

$$X - (A + BG)X(A + BG)^{T} = Q > 0 \tag{15}$$

即 X 可配置.

下面的定理给出了相应于可配置阵 X 的所有控制器 G 的集合.

定理 2　给定可稳对 (A,B)，设 $X>0$ 为满足(6)式的正定阵，则相应于 (A,B) 的稳定化控制器的集合

$$\mathscr{F}(A,B) = \{G; G = B^{+}(TV_M\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}V_N^{T}S^{-1} - A) + (I - B^{+}B)Z\} \tag{16}$$

其中 $TT^{T} = X - Q$ 且 Q 由(14)式定义；$M = (I - BB^{-})T, N = (I - BB^{-})AS, SS^{T} = X$；$V_M, V_N$ 分别来自于 M, N 的奇异值分解

$$M = U_M\begin{bmatrix} \Lambda_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_M^{T} = [U_{M1}\ U_{M2}]\begin{bmatrix} \Lambda_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{M1}^{T} \\ V_{M2}^{T} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$M = U_N\begin{bmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_N^{T} = [U_{N1}\ U_{N2}]\begin{bmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{N1}^{T} \\ V_{N2}^{T} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$U\in R^{(n-r_M)\times(n-r_M)}$，$UU^{\mathrm{T}}=I$；$Z$ 为任意适维矩阵.

证明 由定理1的证明过程可知，X 满足(6)式等价于存在 $Q>0$ 且 $Q\leqslant X$ 使(9)式成立，其中 Q 可表为(14)的形式，又据引理3，(9)式的通解为

$$G = B^{+}(TVS^{-1} - A) + (I - B^{+}B)Z \tag{19}$$

其中 Z 为适维任意阵，正交阵 V 满足

$$MV = N, M = (I - BB^{+})T, N = (I - BB^{+})AS \tag{20}$$

又据引理4，满足(20)的正交阵 V 为

$$V = V_M\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U\end{bmatrix}V_N^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

其中 V_M，V_N 来自(17)(18). 正交阵 $U\in R^{(n-r_M)\times(n-r_M)}$. 将(21)式代入(19)式即可证得定理2.

说明：

1) 式(16)给出了相应于对(A,B)的全部稳定化控制器的参数化表示. 其中满足(6)式的正定阵 $X>0$，满足(14)式的正定阵 $Q>0$，维数为$(n-r_M)\times(n-r_M)$的正交阵 U，维数为 $m\times n$ 的任意阵 Z 均为可选参数.

2) 在具体设计中，上述自由参数可用来达到新的性能指标，诸如极点配置、鲁棒性约束，H_∞ 指标约束等.

3) 在主要结果推导过程中，可配置阵 $X>0$ 起着关键作用. 在不同工程系统中，X 常常具有具体的物理含义，如确定系统中的格兰姆矩阵(Grammian)及随机系统中的协方差矩阵等，这时本文方法可使闭环系统配置给定的 $X>0$，如文献[11—13]等.

4) 当利用 Lyapunov 稳定性理论设计稳定定常系统时，本文方法给出了 Lyapunov 函数的参数化代数表示，从而为系统设计提供了一种新方法.

4 示例

考虑如下线性定常离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

现欲设计所有使 $A+BG$ 稳定的控制器 G，为此，首先由(6)式构造 X，经计算，有

$$B^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

设

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6\end{bmatrix}, Q = F\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_4 & b_5 \\ b_3 & b_5 & b_6\end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}, Z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6\end{bmatrix}$$

则(6)式意味着

$$a_4 + 2a_5 < 0 \tag{22}$$

再由(14)式可得

$$b_6 = -(a_4 + 2a_5) > 0 \tag{23}$$

为此,我们只需选取 $a_i(i=1,2,\cdots,6)$使 X 正定且满足(22),再选取 $b_i(i=1,2,\cdots,6)$使 Q 正定,$b_6=-(a_4+2a_5)$,$Q\leqslant X$,然后任取 $c_i(i=1,2,\cdots,6)$以及 $U=1$ 或 -1,则使 $A+BG$ 稳定的稳定化控制器的集合可由(16)式给出.

5 结论

本文研究稳定离散控制系统的代数结构问题,完整给出了稳定化状态反馈控制器的统一参数化代数刻划,同时也为线性定常稳定系统的结构分析与设计提供了一种新方法.

参 考 文 献

1 Brockett R W. Some Geometric Questions in the Theory of Linear Systems. IEEE Trans Automat Contr, 1976, **21**:449—455.

2 Delchamps D F. Global Structure of Families of Multivariable Linear Systems with an Application to Identification. Math Syst Theory, 1985, **18**: 329—380.

3 Ober R J. Topology of the Set of Asymptotically Stable Minimal Systems. Int J Contr, 1987, **46**(1): 263—280.

4 Amari S. Differential Geometry of a Parametric Family of Invertible Linear Systems-Riemannian Metric, Dual Affine Connections, and Divergence. Math Syst Theory, 1987, **20**: 53—82.

5 Vidyasagar M, Schneider H, Francis B A. Algebraic and Topological Aspects of the Feedback Stabilization. IEEE Trans Automat Contr, 1982, **27**(4): 880—894.

6 El-Sakkary A K. The Gapmetric: Robustness of Stabilization of Feedback Systems. IEEE Trans Automat Contr, 1985, **30**(3): 240—247.

7 Ohara A, Kitamori T. Geometric Structures of Stable State Feedback Systems. IEEE Trans Automat Contr, 1993, **38**(10):1579—1583.

8 Lyapunov A M. Problème Gènèral de La Stabilitè du Mouvement (in Frènch). Annals of the Faculty Science Toulouse, **9**:203—474.

9 Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverse: Theory and Application. John Wiley and Sons, Inc, 1974.

10 Collins Jr E G, Skelton R E. A Theory of State Covariance Assignment for Discrete Systems. IEEE Trans Automat Contr, 1987, **32**(1):35—41.

11 Wang Zidong, Chen Xuemin, Guo Zhi. Controller Design for Continuous Systems with Variance and Circular Pole Constraints. Int J Syst Sci(to Appear).

12 Wang Z D, Chen X M, Guo Z. Constrained Variance Design with Pole Assignment. Chinese Journal of Automation, 1994, **20**(6).

13 Chen X M, Wang Z D, XU G, Guo Z. Eigenstructure Assignment in the Theory of State Covariance Assignment. Syst Contr Lett(Revised).

(下转第 166 页)

参 考 文 献

1 傅京孙等. 人工智能及其应用. 清华大学出版社,1987,292.
2 赵克勤. 集对分析与熵的研究. 浙江大学学报,1992; 65-72(社科).
3 赵克勤. 试论集对分析在人工智能中的应用. CAAI-7 全国人工智能会议论文集,西北工业大学,1992.
4 赵克勤. 基于集对分析的不确定性理论及其应用. 全国智能控制专家讨论会论文集,1994,北京.
5 赵克勤. 集对分析与控制三角形研究. 全国控制理论与应用年会论文集(上),1991.
6 赵克勤,集对分析在过程系统控制中的应用. 全国第一届过程系统控制学术研讨会论文集,D—1, 1991,济南.
7 赵克勤. 基于集对分析的联系熵与熵的联系,熵的一场大辩论. 四川科技出版社,1993; 80—84.
8 赵克勤. 自然辩证法有数学模型吗? 自然辩证法报,1988,10.
9 赵克勤,基于集对分析的对立分类、度量及应用. 科学技术与辩证法,1992,2:26—30.
10 赵克勤. 质量管理三角形及其应用. 质量春秋,1992,6:30—34.
11 赵克勤. 集对分析与同异反决策. 决策探索,1992,2:14—15.
12 赵克勤. 基于集对分析同一度的方案综合评价决策. 决策探索,1994,2:14—15.
13 赵克勤. 用集对分析研究对立同一规律. 社科信息,1993,12:20—22.
14 赵克勤. 集对分析在社会科学研究中的应用. 社会科学总论,1992,2:42—43.
15 韩慧君等. 不确定性推理的实用性研究. 信息与控制,1991,2:59—60.
16 赵克勤. 集对分析及其初步应用. 大自然探索,1994,1:67—22.

DISPOSAL AND DESCRIPTION OF UNCERTAINTIES BASED ON THE SET PAIR ANALYSIS

ZHAO Keqin

(Zhejiang Gold Machine Works, Zhuji, 311811)

Abstract In this paper, disposal and description of uncertainties using the set pair analysis are introduced and discussed.

Key words set pair, set pair analysis, degree of connexion, uncertainties

(赵克勤,男,45岁,主任工程师. 研究领域为集对分析理论及应用.)

(上接第161页)

A UNIFIED ALGEBRAIC PARAMETERIZATION OF STABILIZING CONTROLLERS FOR LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS

WANG Zidong GUO Zhi

(The 11th Dept, Nanjing Univ of Sci & Tech, 210094)(The 10th Dept, Nanjing Univ of Sci & Tech, 210094)

Abstract This paper studies the algebraic structures of stable discrete-time control systems. The purpose of this study is to get the unified algebraic parameterization of stabilizing state feedback controllers for linear discrete-time systems. The results of this paper give not only the fundamental guidlines to design discrete-time state feedback control systems but also a new approach to structure analysis of linear stable systems.

Key words linear discrete-time systems, state feedback, generalized inverse theory, algebraic parameterization

(王子栋,男,29岁,博士,副教授. 研究方向为线性及非线性控制系统综合设计的时域方法.)
(郭 治,男,58岁,教授,博士生导师. 研究领域为滤波随机控制,兵器火力控制.)