第 24 卷第 2 期
1995 年 4 月

信 息 与 控 制
Information and Control

Vol. 24, No. 2
Apr., 1995

一种全局稳定的直接预测自适应控制器

毛志忠

（东北大学自控系　沈阳　110006）

摘　要　本文提出一种基于多阶段二次型滚动优化指标的预测控制算法. 在假定被控系统前 L 个脉冲响应系数已知的条件下，用标准的自适应分析方法证明了直接预测控制算法的全局稳定性及渐近最优性.

关键词　预测控制，自适应控制，稳定性

1　引言

近年来，基于多阶段二次型指标最优化的预测控制算法引起了人们的广泛重视，特别是滚动优化方案，即在所计算出的一组控制信号中，只将第一个施加到被控系统，而在下一个采样周期重新计算控制信号，见文[3,4]. 然而尽管实际应用及仿真研究都表明预测自适应控制算法对模型失配及各种扰动具有较强的鲁棒性，但由于系统参数和设计参数都以非线性的方式出现在控制律中，理论分析相当困难. 因此，到目前为止还没见有关预测自适应控制算法全局稳定性完整证明的报道. Mosca[1] 用 ODE 方法对其所提的预测自适应方法进行了局部稳定性分析，在假定被控系统前 L 个脉冲响应系数已知的情况下，Ortega[2] 提出一种直接预测自适应控制器，并用标准的自适应分析方法证明了其控制器的稳定性，其不足是控制算法需要 L 个并行的参数估计器，使算法的在线计算量变大. 本文通过适当选取指标函数中的加权多项式，将预测控制及极点配置结合起来，提出一种新的预测控制算法，在采用与 Ortega 方法中同样的假定条件下，提出了一种只需一个参数估计器的直接预测自适应控制算法，并证明了由此构成的控制系统的全局稳定性及控制器的渐近最优性.

2　参数已知时的控制算法

2.1　系统模型

设被控对象为确定性线性时不变离散系统（从以下的推导过程可以看到，其稳定性结果可以推广到噪声多项式满足严格正实要求的随机系统）：

$$Ay(k) = Bu(k-1) \tag{1}$$

其中 $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别表示系统的输入和输出，A 和 B 是后移算子 z^{-1} 的多项式

$$A = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$$

$$B = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}$$

若实际系统的时滞不为 0，则 B 多项式中打头的相应系数为 0，这里我们假定多项式 A 和 B 是互质的.

2.2　预测模型

为了能根据(1)式得到系统的 i 步向前预测值，定义

1993—03—18—收稿，1994—05—20 修回

$$1 = AF_i + z^{-i}G_i \qquad (i = 1,2,\cdots,L) \tag{2}$$
$$F_i = 1 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_{i-1} z^{-i+1}$$
$$G_i = g_{i,0} + g_{i,1} z^{-1} + \cdots + g_{i,n-1} z^{-n+1}$$

将(1)式两端同时乘以 $z^i F_i$,并将(2)式代入(1)式整理得

$$y(k+i) = BF_i u(k+i-1) + G_i y(k) \tag{3}$$

进一步将 BF_i 分成两部分

$$BF_i = H_i + z^{-i}E_i \tag{4}$$
$$H_i = h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_{i-1} z^{-i+1}$$
$$E_i = e_{i,0} + e_{i,1} z^{-1} + \cdots + e_{i,m-1} z^{-m+1}$$

由 F_i 的定义可知,$BF_i=(1-z^{-i}G_i)B/A$,所以 H_i 中的系数 $h_j(j=0,1,\cdots,i-1)$分别是被控系统前 i 项脉冲响应系数,将(4)式代入(3)式则有

$$y(k+i) = H_i u(k+i-1) + E_i u(k-1) + G_i y(k) \quad (i = 1,2,\cdots,L) \tag{5}$$

(5)式可以写成如下的向量形式

$$Y(k) = HU(k) + Eu(k-1) + Gy(k) \tag{6}$$

其中

$$Y(k) = [y(k+1)\ y(k+2)\ \cdots\ y(k+L)]^{\mathrm{T}}$$
$$U(k) = [u(k)\ u(k+1)\ \cdots\ u(k+L-1)]^{\mathrm{T}}$$
$$E = [E_1\ E_2\ \cdots\ E_L]^{\mathrm{T}}$$
$$G = [G_1\ G_2\ \cdots\ G_L]^{\mathrm{T}}$$
$$H = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ h_{L-1} & h_{L-2} & h_{L-3} & \cdots & h_0 \end{bmatrix}$$

2.3 控制目标

选取控制信号使下列性能指标取最小值(参见文献[7])

$$J = \sum_{i=1}^{L} \{[x_i(y(k+i) - w(k+i))]^2 + \lambda[Q_i u(k+i-1)]^2\} \tag{7}$$

其中$\{w(k)\}$是有界参考序列.$\lambda>0$ 是加权因子.加权多项式 x_i 及 Q_i 按如下方式选取

$$\begin{cases} X_i = 1 + z^{-i}X_0 \quad (i = 1,2,\cdots,L) \\ X_0 = x_0 + x_1 z^{-1} + \cdots + x_r z^{-r} \end{cases}$$
$$\begin{cases} Q_1 = 1 + z^{-1}Q_0 = 1 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_q z^{-q} \\ Q_i = 1 \qquad (i = 2,3,\cdots,L) \end{cases}$$

这样指标函数(7)式可以整理成

$$J = \sum_{i=1}^{L} \{[y(k+i) + x_0 y(k) - x_i w(k)]^2 + \lambda[Q_i u(k+i-1)]^2 \tag{8}$$

考虑到(5)式,则(8)式可以写成如下的向量形式

$$J = C^{\mathrm{T}}C + \lambda[U(k) + Qu(k-1)]^{\mathrm{T}}[U(k) + Qu(k-1)] \tag{9}$$

其中

$$C = HU(k) + Eu(k-1) + Gy(k) + Xy(k) - \overline{w}(k)$$

$$\overline{w}(k) = [X_1 w(k+1)\ X_2 w(k+2) \cdots X_L w(k+L)]^{\mathrm{T}}$$
$$X = [x_0\ x_0\ \cdots\ x_0]^{\mathrm{T}}$$
$$Q = [Q_0\ 0\ \cdots\ 0]^{\mathrm{T}}$$

2.4 控制律

假定控制信号不受任何约束，则使(9)式取最小值的 $U(k)$ 为

$$U(k) = (H^{\mathrm{T}}H + \lambda I)^{-1}\{H^{\mathrm{T}}[\overline{w}(k) - Eu(k-1) - (G+X)y(k)] - \lambda Q u(k-1)\} \tag{10}$$

为了能顾及由于模型失配、时变及干扰等引起的不确定性，及时进行弥补，这里采用滚动优化方案. 定义

$$D^{\mathrm{T}} = [d_1\ d_2 \cdots d_L] = [\ 1\ 0 \cdots 0][H^{\mathrm{T}}H + \lambda I]^{-1}$$
$$K^{\mathrm{T}} = [k_1\ k_2 \cdots k_L] = D^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}$$

则控制律可以表示为

$$u(k) = K^{\mathrm{T}}[\overline{w}(k) - Eu(k-1) - (G+X)y(k)] - \lambda D^{\mathrm{T}}Qu(k-1) \tag{11}$$

即

$$u(k)[1 + z^{-1}(K^{\mathrm{T}}E + \lambda D^{\mathrm{T}}Q)] = K^{\mathrm{T}}[\overline{w}(k) - (G+X)]y(k) \tag{12}$$

将(2)代入(1)式可导出闭环方程为

$$y(k)[A + z^{-1}A(k^{\mathrm{T}}E + \lambda D^{\mathrm{T}}Q) + z^{-1}Bk^{\mathrm{T}}(G+X)] = z^{-1}Bk^{\mathrm{T}}\overline{w}(k)$$

由此可见，若要想使闭环系统稳定，则特征多项式

$$P = A + z^{-1}[A(K^{\mathrm{T}}E + \lambda D^{\mathrm{T}}Q) + z^{-1}BK^{\mathrm{T}}(G+X)] \tag{13}$$

的根必须全部在单位圆内. 事实上，(13)式可以化简整理成如下形式

$$P = A + z^{-1}K^{\mathrm{T}}(AE + BG) + z^{-1}(\lambda d_1 Q_0 A + \overline{K}X_0 B) \tag{14}$$

由(14)式可知，当系统参数已知时，只要 A、B 互质，同时

$$\left.\begin{aligned} &\lambda d_1 \neq 0 \\ &\overline{K} = k_1 + k_2 + \cdots + k_L \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

就可以通过选取 Q_0 及 X_0 使闭环极点处于任意期望的位置. 由于 $(H^{\mathrm{T}}H+\lambda I)$ 是正定矩阵 $(\lambda>0)$，所以 $(H^{\mathrm{T}}H+\lambda I)^{-1}$ 也是正定矩阵，所以 $d_1>0$ 恒成立；另一方面，$\bar{k}$ 与闭环系统的静态增益成比例，故也不可能为零，因此(15)式总是成立的，即总能找到 Q_0 和 X_0，使闭环极点处在期望位置.

3 自适应控制算法

在给出自适应控制算法之前，我们对被控系统作如下假设

A1.　$r=\max\{m,n\}$ 已知.

A2.　互质，以保证存在 Q_0 及 X_0，使 P 多项式稳定.

A3.　A，B 被控系统的前 L 个脉冲响应系数 $h_j(j=0,1,\cdots,L-1)$ 是已知的.

假设 A2 是很自然的，这相当于非自适应情况下闭环系统应满足的条件，关于 A3，Mosca[1] 和 Ortega[2] 在分析预测自适应控制器的稳定性时也作了这种假设，这对实际过程来说并不过分.

3.1 自适应控制算法

基于上述假定条件，控制律(11)可以写成如下形式

$$u(k) = K^{\mathrm{T}}\overline{w}(k) - \lambda D^{\mathrm{T}}Qu(k-1) - K^{\mathrm{T}}Xy(k) - \varphi^{\mathrm{T}}(k)\hat{\theta}(k) \tag{16}$$

其中

$$\varphi^{T}(k)\hat{\theta}(k)=K^{T}\hat{E}u(k-1)+K^{T}\hat{G}y(k)$$

$$\varphi(k)=[y(k)\ y(k-1)\cdots y(k-r+1)\quad u(k-1)\ u(k-2)\cdots u(k-r)]^{T}$$

为了得到辨识方程，将(6)式两端同时乘以 H^{T} 得

$$H^{T}y(k)=H^{T}HU(k)+H^{T}Eu(k-1)+H^{T}Gy(k) \tag{17}$$

即
$$(H^{T}H+\lambda I)U(k)=\lambda U(k)+H^{T}[y(k)-Eu(k-1)-G(y(k)] \tag{18}$$

(18)式两端同时左乘$[H^{T}H+\lambda I]^{-1}$后取首行得

$$u(k)=\lambda D^{T}v(k)+K^{T}y(k)-K^{T}Eu(k-1)-K^{T}Gy(k)$$

记
$$-\psi(k)=u(k)-\lambda D^{T}U(k)-K^{T}y(k)$$

则
$$\psi(k)=\varphi^{T}(k)\theta \tag{19}$$

而 θ 可由如下递推最小二乘算法在线辨识得到

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+M(k)\varphi(k-L)[\psi(k-L)-\varphi^{T}(k-L)\hat{\theta}(k-1)] \tag{20}$$

$$M(k)=M(k-1)-\frac{M(k-1)\varphi(k-L)\varphi^{T}(k-L)M(k-1)}{1+\varphi^{T}(k-L)M(k-1)\varphi(k-L)} \tag{21}$$

式(16)、(20)和(21)组成了自适应控制算法.

3.2 稳定性分析

为便于以下分析，记

$$e(k)=\varphi^{T}(k-L)\theta-\varphi^{T}(k-L)\hat{\theta}(k-1) \tag{22}$$

$$\varepsilon(k)=\varphi^{T}(k-L)\theta-\varphi^{T}(k-L)\hat{\theta}(k-L) \tag{23}$$

定义

$$\tilde{\theta}(k)=\theta-\hat{\theta}(k)$$

则(22)及(23)式可写为

$$e(k)=\varphi^{T}(k-L)\tilde{\theta}(k-1) \tag{24}$$

$$\varepsilon(k)=\varphi^{T}(k-L)\tilde{\theta}(k-L) \tag{25}$$

注意到(20)式也可以写成如下形式

$$\hat{\theta}(k-1)=\hat{\theta}(k-L)+a(k) \tag{26}$$

其中

$$a(k)=\sum_{i=1}^{L-1}M(k-i)\varphi(k-L-i)e(k-i)$$

(26)式两端同时减去 θ 得

$$\tilde{\theta}(k-1)=\tilde{\theta}(k-L)+a(k) \tag{27}$$

将(27)式代入(24)式则有

$$e(k)=\varphi^{T}(k-L)\tilde{\theta}(k-L)-\varphi^{T}(k-L)a(k)=\varepsilon(k)\varphi^{T}(k-L)a(k)$$

即
$$\varepsilon(k)=e(k)+\varphi^{T}(k-L)a(k) \tag{28}$$

另一方面，(16)式两端同时加上 $\varphi^{T}(k)\theta$，移项化简后，消去 $y(k)$ 可得到

$$Pu(k-L)=A[K^{T}\overline{w}(k-L)+\varepsilon(k)] \tag{29}$$

同理，(16)式两端同时加上 $\varphi^{T}(k)\theta$，移项化简后，消去 $u(k)$ 可得到

$$Py(k-L)=z^{-1}B[K^{T}\overline{w}(k-L)+\varepsilon(k)] \tag{30}$$

设$\{u^{*}(k)\}$为参数已知时的最优控制序列，则由 A2 可知$\{u^{*}(k)\}$必是有界序列，将(16)式两端

同时减去 $u^*(k)$，经移项化简后两端同时乘以 z^{-L} 可得

$$P[u(k-L)-u^*(k-L)]=\varepsilon(k) \tag{31}$$

为便于以下的论证，先给出以下引理

引理 1　辨识算法(20)和(21)具有下列性质

①　$$\lim_{k\to\infty}\frac{e^2(k)}{1+c\varphi^T(k-L)\varphi(k-L)}=0,\ c=\lambda_{\max}(M^{-1}(0))$$

②　$$\lim_{k\to\infty}a(k)=0$$

证明参见文献[5]中引理 3.3.6

引理 2　设 $v_1(k)$，$v_2(k)$和 $v_3(k)$是非负实际量序列．若存在固定的 c_3 及 c_4 使

$$v_1(t)\leqslant c_3+c_4\max[v_2(\tau)+v_1(\tau)v_3(\tau)]\qquad 0\leqslant t\leqslant k$$

同时

$$\lim_{k\to\infty}v_3(k)=0$$

那么必存在常数 c_1 及 c_2，使得

$$v_1(t)\leqslant c_1+c_2\max_{0\leqslant\tau\leqslant k}\{v_2(\tau)\}$$

证明参见文献[6].

至此，可以将自适应控制算法(16)、(20)和(21)的稳定性归纳如下

定理　满足条件 A1—A3，当自适应控制算法(16)、(20)和(21)用于被控系统(1)时，所导致的闭环系统具有以下特性

①$\{u(k)\}$和$\{y(k)\}$是有界的.

②$\lim\limits_{k\to\infty}[u(k)-u^*(k)]=0$

证明　由于 P 是稳定多项式，$\{w(k)\}$是有界序列，由公式(28)，(29)和(30)，以及[5]中引理 B.3.3 可知，对每一个 k 必存在常数 $0<m_1,m_2,m_3,m_4<\infty$，使

$$|u(t-L)|\leqslant m_1+m_2\max_{0\leqslant\tau\leqslant k}|e(\tau)+\varphi^T(\tau-L)a(\tau)| \tag{32}$$

$$|y(t-L)|\leqslant m_3+m_4\max_{0\leqslant\tau\leqslant k}|e(\tau)+\varphi^T(\tau-L)a(\tau)| \tag{33}$$

$$(L\leqslant t\leqslant k)$$

式(32)和(33)意味着存在常数 $0<m_5,m_6<\infty$，使

$$\begin{aligned}\|\varphi(k-L)\|&\leqslant m_5+m_6\max_{0\leqslant\tau\leqslant k}|e(\tau)+\varphi(\tau-L)a(\tau)|\\&\leqslant m_5+m_6\max\{|e(\tau)|+\|\varphi^T(\tau-L)\|\cdot\|a(\tau)\|\}\end{aligned} \tag{34}$$

由引理 1.②及引理 2 可知必存在常数 $0<m_7,m_8<\infty$，使得

$$\|\varphi(k-L)\|\leqslant m_7+m_8\max_{0\leqslant\tau\leqslant k}|e(\tau)| \tag{35}$$

由(35)式，引理 1.①及文献[5]中的关键技术引理可知

$$\|\varphi(k-L)\|<\infty \tag{36}$$

$$\lim_{k\to\infty}e(k)=0 \tag{37}$$

由(36)式及 $\varphi(k-L)$的定义，定理的第一部分立即得证；由(28)、(36)、(37)及引理 1.②可知

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(k)=0$$

再由(31)式及 A2 可得

$$\lim_{k\to\infty}[u(k)-u^*(k)]=0$$

4 结论

本文通过适当选取加权多项式，将预测控制与极点配置结合起来，提出一种新的预测控制算法，并在假定被控系统前 L 个脉冲响应系数已知的情况下，给出了一种直接预测自适应控制算法，同时分析了控制系统的全局稳定性及控制器的渐近最优性，这种控制器只须一个参数估计器，与 Ortega[2] 的方法相比，在线计算量可以大大地减少.

参 考 文 献

1 Mosca E, G Zappa. Removal of PR Condition in Minimum Variance Adaptive Regulators by Multistep Horizon. IEEE Trans on Aut Cont, 1984, **29**(9): 844－846.

2 Ortega R, Gustavo S G. A Globally Convergent Multistep Receding Horizon Adaptive Controller. Proc of ACC, 1987: 566－570.

3 Clarke D W, *et al*. Generalized Predictive Control. Automatica, 1987: **23**(2): 137－162.

4 De Keyser, R M C, *et al*. A Comparative Study of Self-adaptive Long-range Predictive Control Methods. Automatica, 1988, **24**(2): 149－163.

5 Goodwin G C, K S Sin. Adaptive Filtering, Prediction and Control. Prentice-Hall, 1984.

6 Tsiligiannis C A, S A Svoronos. Deterministic Convergence of a Clarke-Gawthrop Selftuning Controller. Automatica, 1986, **22**(2): 193－197.

7 顾兴源，毛志忠. 一种基于广义预测的极点配置自适应控制算法. 控制与决策，1992，7(3): 221－224.

A GLOBALLY STABLE DIRECT PREDICTIVE ADAPTIVE CONTROLLER

MAO Zhizhong

(*Dept of Automatic Control, Northeast University, Shenyang*)

Abstract In this paper, a predictive control algorithm based on multistep receding horizon scheme is proposed. Under the assumption that the first L coefficients of a process impulse response are known, the stability and optimality of the direct predictive adaptive controller are proved by standard adaptive control techniques.

Key words predictive control, adaptive control, stability

(毛志忠，男，34岁，博士，副教授. 所从事的研究领域为预测自适应控制理论及计算机过程控制的应用研究.)