

文章编号: 1002-0411(2001)04-352-04

外汇储备结构调整的非线性规划数学模型¹

马 杰 任若恩 沈沛龙

(北京航空航天大学 经济管理学院 北京 100083)

摘 要: 外汇储备结构调整是实现储备资产增值盈利和回避风险的必然要求, 目前突出的问题是实际中还没有切实可行的定量分析工具. 本文从外汇市场的变化出发, 利用 Markowitz 基本期望方差模型的思想, 建立了一个非线性数学模型来确定外汇储备的最佳结构, 并且成功地给出了该问题的一般解析解, 这是外汇储备结构管理定量分析的理论模型的一个新突破。

关键词: 非线性规划; 结构调整; 罚函数

中图分类号: F830.9

文献标识码: A

NONLINEAR PROGRAMMING MODEL USED FOR STRUCTURAL ADJUSTMENT OF FOREIGN EXCHANGE RESERVES

MA Jie REN Ruo-en SHEN Pei-long

(School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics Beijing 100083)

Abstract: The structural adjustment of foreign exchange reserves is a necessary request to achieve the increment of deposit assets and keep away the risk. The extrusive problem is that there is no doable quantified tools in the fact. Using the thinking of the Markowitz model, this paper come from the change of the exchange market and found a nonlinear mathematical model to make sure the optimal structure of foreign exchange reserves. Also, this paper gives out the common solution for this problem. This is a new breakthrough about quantified analysis on the structural management of foreign exchange reserves.

Keywords: nonlinear programming, structural adjustment, penalty function

1 引言(Introduction)

90 年代中期以来由于经常项目和资本项目的连续双顺差, 中国积累了大量的外汇储备, 目前大约有 1600 多亿美元. 外汇储备的管理主要包括规模管理与结构管理. 关于适度的外汇储备规模问题, 国内学术界一直争论纷纷. 总的来说, 本国合适的储备水平需要综合考虑本国经济的各方面因素, 包括国民经济发展规模和速度、经济开放程度、对外贸易发展状况、国际收支失衡的调节速度以及利用外资和国际融资能力等.

对于这巨额储备资产如何经营和管理的问题, 当前的研究不多, 定量的理论分析模型几乎没有. 笔者仔细检索了一下关于储备结构管理方面的文献, 没有发现任何此类定量研究的模型, 主要还是一些定性经验规则的阐述, 如要求储备管理遵循安全、流动和盈利三个原则. 另外据了解, 我国当前的外汇储备结构管理也基本上是根据定性的经验判断为主, 还缺乏一些必要的定量分析工具. 目前全球官方储备超过一半是以美元为单位, 比美国在全球生产总值中的比例高出数倍. 欧元问世, 将逐步打破美元在国际贸易投资中的霸主地位, 为稳定国际金融体系起到重要作用. 为分散风险, 可以肯定全球所有的央行都在考虑持有一定的数量的欧元, 储备币种多元化是一种全球的趋势. 随着欧元诞生以及中欧贸易关系的密切, 国内不断有学者建议增加欧元的储备. 但是, 由于欧元近年来总的表现为下跌势态, 中国的外汇储备价值也出现了较大幅度的缩水. 因此加强外汇储备结构管理是当前一项迫切需要紧急研究的课题.

2 建模的思想以及基本经济模型(The thinking of programming and basic economic model)

¹ 收稿日期: 2000-12-27
基金项目: 国家自然科学基金与加拿大麦吉尔大学联合资助(79942011)

当前外汇市场的交易量每天都达一万多亿美元, 主要国际货币的汇率波动十分频繁和剧烈, 这也是对外汇储备价值产生影响的主要原因. 另外, 考虑到美国、欧盟和日本在国际贸易、投资中的地位以及国际储备现实状况, 本文的研究中假定一国外汇储备主要由美元、欧元和日元三种基本国际硬通货构成. 由于其它的货币币种在国际储备中所占比重实际中很小, 几乎可以忽略不计, 可以认为这三种货币的构成比例就是外汇储备的结构, 它们之间价值的相互变化就反应了储备资产价值的变化. 因此本模型的一个基本特点就是强调外汇市场资本流动的影响, 是考虑实际情况基于外汇市场交易的一个数学模型.

在本研究中我们尝试采用 Markowitz 的证券组合理论的思想, 将外汇储备资产证券化, 将外汇储备整体看成一个证券组合, 通过分析这个证券组合的最优资产配置比例来确定一国外汇储备资产的构成. 但是, 与 Markowitz 的期望方差模型^[2]不一样的是, 本模型中有两种资产的收益率分别是由两个风险因子决定的, 这是因为不同货币计量的收益率是不可比的, 必须将不同资产的收益率折算为同一标准货币的收益率, 而这将使储备资产组合的收益以及模型的求解都更为复杂化. 若美元、欧元、日元在外汇储备中的比例分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 , 不妨设储备资产组合的美元期望收益率和方差分别为:

$$R_p = x_1 \bar{r}_1 + x_2(\bar{r}_2 + \bar{r}_4) + x_3(\bar{r}_3 + \bar{r}_5) = x_1 \bar{r}_1 + x_2 \bar{r}_2 + x_3 \bar{r}_3 + x_4 \bar{r}_4 + x_5 \bar{r}_5$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i \sigma_{ij} x_j$$

其中 r_1 、 r_2 、 r_3 分别是美元利率、欧元利率、日元利率, r_4 、 r_5 表示美元对欧元预期贬值率以及美元对日元预期贬值率, 而 $\bar{r}_i = E(r)$, $\sigma_i^2 = VAR(r)$, σ_{ij} 表示两种风险因子之间的协方差; 为了清晰地表明预期贬值率对于总风险的作用, 不妨令 $x_4 = x_2$, $x_5 = x_3$; 另外, $(\bar{r}_2 + \bar{r}_4)$ 表示欧元资产的美元回报率, $(\bar{r}_3 + \bar{r}_5)$ 表示日元资产的美元回报率, 在推导利率平价的过程中可以很清楚地得到这一关系.

外汇储备经营需要兼顾安全性、流动性和盈利性, 但是这三者又不可能完全兼得. 考虑到外汇储备资产的首要目的是保证国际支付和市场信心, 而不是以盈利为主要目的的特征, 可以假设一国外汇管理当局的政策目标是使储备资产在保证一定收益的情况下, 使储备资产面临的风险最小. 在此假定资本具有充分的流动性, 三种货币的调整不考虑交易费用. 由此可得到一个基本经济模型:

$$\begin{aligned} \text{MIN } \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i \sigma_{ij} x_j \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_5 \\ \sum_{i=1}^5 x_i \bar{r}_i \geq \mu \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{array} \right. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

以上模型是一个典型的非线性二次规划问题, 该模型的经济意义也简单明了便于理解. 其中目标函数是使表示预期风险的方差最小, 约束条件中的(4)式是使收益高于一个事先设定的目标值, (5)式是为了保证每种货币均不允许被卖空.

3 模型的求解及应用(Solution and application for model)

为了计算求解的方便, 考虑到 x_2 与 x_4 以及 x_3 与 x_5 的经济意义完全相同, 经简化目标函数可变化为:

$$\begin{aligned} \text{MIN } \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i \sigma_{ij} x_j = x_1^2 \sigma_{11} + x_2^2 (\sigma_{22} + 2\sigma_{24} + \sigma_{44}) + x_3^2 (\sigma_{33} + 2\sigma_{35} + \sigma_{55}) \\ &+ 2[x_1 x_2 (\sigma_{12} + \sigma_{14}) + x_1 x_3 (\sigma_{13} + \sigma_{15}) + x_2 x_3 (\sigma_{23} + \sigma_{25} + \sigma_{34} + \sigma_{45})] \end{aligned}$$

为简化计算以及求解的方便, 不妨令:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \sigma_{11} & a_{22} = \sigma_{22} + 2\sigma_{24} + \sigma_{44} & a_{33} = \sigma_{33} + 2\sigma_{35} + \sigma_{55} \\ a_{12} = \sigma_{12} + \sigma_{14} & a_{13} = \sigma_{13} + \sigma_{15} & a_{23} = \sigma_{23} + \sigma_{25} + \sigma_{34} + \sigma_{45} \end{array}$$

另外, 再令:

$$b_1 = \bar{r}_1 \quad b_2 = \bar{r}_2 + \bar{r}_4 \quad b_3 = \bar{r}_3 + \bar{r}_5$$

由此可得到新的同解非线性二次规划问题:

$$\begin{aligned} \text{MIN } \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i a_{ij} x_j \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \sum_{i=1}^3 x_i b_i \geq \mu \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

其中参数除 x_i 外都可由实际条件确定. 由于约束条件中同时含有等式约束和不等式约束条件, 根据 1969 年 Zangwill 求解约束最优化问题的算法, 对此非线性规划问题可以构造一个以下形式的罚函数^[1]:

$$P_c(x) = c \sum_{i=1}^m [\min(0, g_i(x))]^2 + \frac{c}{2} \sum_{j=1}^p [h_j(x)]^2$$

相应地构造增广目标函数为:

$$\begin{aligned} F_c(x) = f(x) + P_c(x) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i a_{ij} x_j + c[\min(0, x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 - \mu)]^2 \\ &+ c \sum_{i=1}^3 [\min(0, x_i)]^2 + \frac{c}{2} (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 \end{aligned}$$

考虑到罚函数法是对不满足约束条件的点进行惩罚的思想, 对上式求一阶偏导条件^[13]

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2 \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j + 2cb_1(x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 - \mu) + 2cx_1 + c(x_1 + x_2 + x_3 - 1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2 \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j + 2cb_2(x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 - \mu) + 2cx_2 + c(x_1 + x_2 + x_3 - 1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2 \sum_{j=1}^3 a_{3j} x_j + 2cb_3(x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 - \mu) + 2cx_3 + c(x_1 + x_2 + x_3 - 1) = 0 \end{cases}$$

经化简并用变量代换可得如下线性方程组:

$$\begin{cases} w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 = d_1 \\ w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 = d_2 \\ w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

其中:

$$\begin{aligned} w_{11} &= 2a_{11} + 2cb_1^2 + 3c & w_{12} &= 2a_{12} + 2cb_1 b_2 + c & w_{13} &= 2a_{13} + 2cb_1 b_3 + c \\ w_{21} &= w_{12} & w_{22} &= 2a_{22} + 2cb_2^2 + 3c & w_{23} &= 2a_{23} + 2cb_2 b_3 + c \\ w_{31} &= w_{13} & w_{32} &= w_{23} & w_{33} &= 2a_{33} + 2cb_3^2 + 3c \\ d_1 &= 2c\mu b_1 + c & d_2 &= 2c\mu b_2 + c & d_3 &= 2c\mu b_3 + c \end{aligned}$$

由克莱姆法则可解得线性方程组的一般解析解为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{d_1 w_{22} w_{33} + d_2 w_{13} w_{23} + d_3 w_{12} w_{23} - d_1 w_{23}^2 - d_2 w_{12} w_{33} - d_3 w_{22} w_{13} w_{22}}{w_{11} w_{22} w_{33} + 2w_{12} w_{13} w_{23} - w_{11} w_{23}^2 - w_{22} w_{13}^2 - w_{33} w_{12}^2} \\ x_2 = \frac{d_1 w_{13} w_{23} + d_2 w_{11} w_{33} + d_3 w_{12} w_{13} - d_1 w_{12} w_{33} - d_2 w_{13}^2 - d_3 w_{13} w_{23}}{w_{11} w_{22} w_{33} + 2w_{12} w_{13} w_{23} - w_{11} w_{23}^2 - w_{22} w_{13}^2 - w_{33} w_{12}^2} \\ x_3 = \frac{d_1 w_{12} w_{23} + d_2 w_{12} w_{13} + d_3 w_{11} w_{22} - d_1 w_{13} w_{22} - d_2 w_{11} w_{23} - d_3 w_{12}^2}{w_{11} w_{22} w_{33} + 2w_{12} w_{13} w_{23} - w_{11} w_{23}^2 - w_{22} w_{13}^2 - w_{33} w_{12}^2} \end{cases}$$

根据罚函数求解的思想, 当 $c \rightarrow \infty$ 时, 取极限可得到该规划问题的最优解趋于 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) .

本模型中所需的美元、欧元和日元利率及其波动率可从多种渠道容易获得, 而同时期外汇市场对货币贬值预期及其波动率可从“*The Financial Times Currency Forecaster*”等数据调查资料中获得; 变量间的相关系数可采用现在通用的 JP. Morgan 公司 Riskmetrics 的相关系数或者国际清算银行巴塞尔委员会的 Basle 相关系数, 模型中用的最低收益率 μ 可以由决策人事先设定. 这样, 本模型中的参数除 x_i 外都可由实际条件

确定, 代入实际数据就可以通过本模型确定外汇储备的最优组合结构. 限于文章篇幅, 本文中就不便详细举例说明具体使用方法. 顺便说一下, 虽然本模型建模对象针对的是一国外汇储备结构, 但是由于外汇市场是一个全球性统一交易的市场, 它对于拥有多币种外汇头寸的跨国公司或金融机构的外汇头寸结构管理也同样具有很好的借鉴作用. 另外, 本文中考虑的以美元、欧元和日元三种货币为储备货币的模型符合绝大多数国家的实际储备情况, 对于少数国家以其它币种为储备货币以及含有三种以上的多元储备币种的情况, 都可以同样依照本模型中的思想进行建模求解.

4 结束语(Conclusion)

外汇市场是当今世界上交易量最大的市场, 每天的成交量都超过一万亿美元, 主要货币汇率的波动不但频繁而且十分剧烈, 这是外汇储备价值变动的主要原因. 尤其是近年来由于欧元的持续下跌, 我国的外汇储备经营表现欠佳, 目前突出的问题是实际中还没有开发出切实可行的定量分析工具, 加强储备结构管理是当前面临的一个重要课题. 本文从外汇市场的变化出发, 利用 Markowitz 基本期望方差模型的思想, 建立了一个非线性数学模型来确定外汇储备的最佳结构, 这是外汇储备结构管理定量分析理论模型的一个新的尝试.

该模型的新颖之处不在于模型本身而在于提出了一种外汇储备结构调整定量分析的方法, 建模思想简单明确, 求解的方法也不十分复杂便于理解并可以编成程序, 最后得出的解析解切合实际情况易于计算具有较高的实用价值作为辅助决策. 但是, 除了外汇市场的变化以外, 一国的贸易结构和投资状况等其他因素也会对储备结构的确定产生影响, 实际分析中也需要对这些因素加以综合考虑.

参 考 文 献 (References)

- 1 陈开明. 非线性规划[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1991
- 2 叶中行, 林建忠. 数理金融[M]. 北京: 科学出版社, 1998
- 3 卢向华, 郭锡伯. 运筹学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1990
- 4 奚君羊. 国际储备研究[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 1998
- 5 Mizen, Paul. Can Foreign Currency Deposits Prop up a Collapsing Exchange-rate regime? [J]. Journal of Development Economics. 1999, 4: 553~ 562
- 6 Blejer M I, L Schumacher. Central Bank Vulnerability and the Credibility of Commitments: A Value-at-Risk Approach to Currency Crises [R]. Washington DC: IMF working paper, WP/98/65, 1998

作者简介

马 杰(1974-), 男, 博士生. 研究领域为汇率行为研究与外汇风险管理, 已在核心期刊上发表论文 3 篇, 出版大学教材 1 本.

任若恩(1948-), 男, 教授, 博士生导师, 享受政府特殊津贴的专家, 曾任世界银行、国际货币基金和 OECD 等国际组织的高级经济学家. 研究领域为国际竞争力比较, 金融工程与风险管理, 保险经济学等.

沈沛龙(1964-), 男, 博士生. 研究领域为信用风险管理.

(上接第 336 页)

- 4 Li X R, Bar-Shalom Y. Multiple-model Estimation with Variable Structure. IEEE Trans. on Automatic Control, 1996, 41 (4): 478~ 493
- 5 周宏仁, 敬忠良, 王培德. 机动目标跟踪. 国防工业出版社, 1991
- 6 Efe M, Bather J A, Atherton D P. An Adaptive Kalman Filter with Sequential Rescaling of Process Noise, Proceedings of ACC'99, 1999, 3913~ 3917
- 7 Mehra R K. Approach to Adaptive Filtering, IEEE Trans. On

Automatic Control, 1972, 17(10): 693~ 698

作者简介

何 衍(1973-), 男, 博士生. 研究领域为数据融合、目标跟踪、智能控制.

蒋静坪(1935-), 男. 研究领域为智能控制、计算机控制、目标跟踪、信息融合.

张国宏(1966-), 男, 工程师、硕士. 研究领域为计算机控制、开关磁阻电机.