文章编号: 1002-0411(2002)03-202-09

单阶段多产品批处理过程的短期调度
2. 模型的简化

陈昌领[1] 宗学军[2] 孙 鹏[3] 邵惠鹤[1]
(1. 上海交通大学自动化研究所 200030; 2. 沈阳化工学院过程工程中心 110021;
3. 上海交通大学智能工程实验室)

摘 要: 本文第一部分建立了具有并行处理设备多产品单阶段批处理过程短期调度的基本数学模型. 根据该模型和多产品单阶段批处理过程的特点, 本文这一部分引入一些启发性规则, 并将这些启发性规则融入到模型中. 合理地使用这些启发性规则不但能减小模型的整数变量、连续变量和约束的数量, 使得模型表达更紧、求解速度加快, 而且能得到最优解. 大量计算表明该模型求解速度快, 尤其对包含多个同种订单的调度问题更为显著. *

关键词: 短期调度; 多产品批处理过程; 混合整数线性规划; 启发性规则
中图分类号: TP13 文献标识码: B

THE SHORT-TERM SCHEDULING OF MULTIPRODUCT SINGLESTAGE BATCH PLANTS WITH PARALLEL LINES
PART TWO: REDUCTION OF THE MODEL

CHEN Chang-ling[1] ZONG Xue-jun[2] SUN Peng[3] SHAO Hui-he[1]
(1. *Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University* 200030, *China*; 2. *PSE, Shenyang Institute of Chemical Technology* 110021, *China*; 3. *Lab of Intellengence Engineering, Shanghai Jiaotong University* 200030, *China*)

Abstract: The first part of this paper presents a model for the short-term scheduling of multiproduct singlestage batch plants with parallel lines. Then, in this part, some heuristic rules are introduced into the model based on the characteristics of the model and multiproduct singlestage batch plants. The rational usage of these heuristic rules can reduce the number of 0-1 variables, continuous variables and constraints, so that the formulation of the model is tighter and the computational effort is greatly reduced. Furthermore, the heuristic rules have no effect on the optimality of the model. A large number of computational examples show that the optimal scheduling can be obtained by solving MILP model in a reasonable short time, especially when the scheduling problem involving several identical orders is considered.

Keywords: short-term scheduling, mulitproduct batch plant, MILP, heuristic rules

1 引言(Introduction)

本文第一部分基于时间间隙的概念和连续时间描述, 把订单和设备分配到时间间隙表达为两类 0-1 变量, 建立了单阶段多产品批处理过程的短期调度数学模型. 相对于其他基于时间间隙的模型[1], 该模型表达所包含的整数变量少. 但是该模型仍然包含很多的整数变量、连续变量和约束.

实用的调度算法不但要求建立良好的数学模型, 而且需要引入一些有效的启发性规则, 加快模型求解速度. Pinto 和 Grossmann[2,3]研究了多阶段批处理过程(Multistage Batch Plant)的调度问题. 他们通过引入预先排序(启发性)规则, 把一个涉及到订单分配、排序和确定订单生产开始、结束时间的问题转化为订单分配和确定订单生产开始、结束时间的问题, 简化了模型的求解. 但是应用该方法通常不能得到模型的最优解. Cerdá[4]、Méndez[5]和 Hui 等[6]引入一些启发性规则, 减少了可能紧排在每个订单之前生产的订单数量, 即减少了模型所包含整

* 收稿日期: 2001-05-20
基金项目: 国家 973 项目资助

数变量、连续变量和约束的数量. 但是这些启发性规则损害了模型的最优性; 此外, 过度地减少可能紧排在每个订单之前生产的订单将导致可行解不存在; 而且这些启发性规则过多地依赖于订单的交货期.

本文根据第一部分建立的模型和多产品单阶段批处理过程的特点, 引入一些启发性规则. 这些启发性规则不但能减少整数变量、连续变量和约束的数量, 而且还能得到最优解. 本文安排如下: 第二节引入两种启发性规则; 第三节在考虑这些启发性规则的基础上, 重新表达了本文第一部分提出的多产品单阶段批处理过程的数学模型; 第四节从计算的角度, 详细介绍本文模型在使用上的一些相关问题; 第五节通过大量计算实例来说明模型和启发性规则的有效性和适用性.

2 启发性规则的引入(Introduction of Heuristic Rules)

为了减小调度模型的规模, 通常需要引入一些启发性规则. 从时间间隙在设备上分配的示意图(见图 1) 可看出: 每个设备只能分配到一部分编号连续的时间间隙. 合理利用这一特点, 通过引入一些恰当的启发性规则, 可减少整数变量的数量 $Y_{j,k}$. 但是启发性规则的引入必须符合如下要求:

(1) 可能分配到所有设备的时间间隙数量总和应大于等于订单总数, 即:

$$\sum_{j\in J}|K_j| \geqslant \sum_{i\in I} n_i = |K| \tag{1}$$

其中: K_j 表示设备 j 可能分配的时间间隙集合, $|\cdot|$ 表示集合的势.

(2) 设备集 J_i 中的所有设备可能分配到时间间隙的次数总和应大于等于订单 i 的数量, 即:

$$\sum_{j\in J_i}|K_j| \geqslant n_i \tag{2}$$

时间间隙	1	2	3	4	5	6
设备 1	1					
设备 2		1	1			
设备 3				1	1	
设备 4						1

图 1　时间间隙在设备上的分配

Fig. 1　Allocation of units to time slots

根据上面两个要求, 下面引入两种启发性规则.

启发性规则一(Heuristic Rule 1)

$$k_{b,j} = \max\Big(j, |K| - \sum_{i\in(I_j\cup I_{j+1}\cup\cdots\cup I_{\bar{j}})} n_i + 1\Big) \quad \forall j\in J \tag{3}$$

$$k_{e,j} = \min\Big(|K| - |J| + j, \sum_{i\in(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_j)} n_i\Big) \quad \forall j\in J \tag{4}$$

式(3) 规定了每个设备 j 可能分配的最小时间间隙编号 $k_{b,j}$, 式(4) 规定了每个设备 j 可能分配的最大时间间隙编号 $k_{e,j}$. 当每个设备至少分配到一个时间间隙时, 根据本文的基本思想, 每个设备可能分配的最小时间间隙编号应当大于等于 j, 最大时间间隙编号小于等于 $|K| - |J| + j$. 另一方面, 设备 $j, j+1, \cdots, \bar{j}$ 所能分配时间间隙数量最多为这些设备所能处理的订单数 $\sum_{i\in(I_j\cup I_{j+1}\cup\cdots\cup I_{\bar{j}})} n_i$, 设备 $1, 2, \cdots j$ 所能分配的时间间隙数量最多为 $\sum_{i\in(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_j)} n_i$. 因此, 设备 j 可能分配的最小时间间隙编号应大于等于 $|K| - \sum_{i\in(I_j\cup I_{j+1}\cup\cdots\cup I_{\bar{j}})} n_i + 1$, 最大时间间隙编号应小于等于 $\sum_{i\in(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_j)} n_i$. 综合上面两个因素, 就得到式(3) 和(4), 同时也就估计出了设备 j 可能分配的时间间隙集 $K_j = [k_{b,j}, k_{e,j}]$.

值得指出的是: 按照(3) 和(4) 估计出每个设备所能分配的时间间隙, 至少能减少整数变量 $2\cdot(1 + 2 + \cdots + \bar{j} - 1) = \bar{j}\cdot(\bar{j} - 1)$. 而且, 当每个设备至少分配到一个时间间隙时, 按此方法估计每个设备所能分配的时间间隙并不影响解的最优性.

启发性规则二(Heuristic Rule 2)

按式(3) 和(4) 估计设备 $j, j+1, \cdots \bar{j}$ 和 $1, 2, \cdots, j$ 所能分配的时间间隙数量非常保守, 导致集合 K_j 所包含的元素较多. 因此将上述估计方法改进如下:

$$P^b_{i,j} = \begin{cases} n_i & N^b_{i,j} = |J_i| \\ \mu\cdot N^b_{ij}\cdot n_i/|J_i| & N^b_{i,j} \neq |J_i| \end{cases}$$
$$\forall i\in(I_j\cup I_{j+1}\cup\cdots\cup I_{\bar{j}}),\ j\in J \tag{5}$$

$$P^e_{i,j} = \begin{cases} n_i & N^e_{i,j} = |J_i| \\ \mu\cdot N^e_{ij}\cdot n_i/|J_i| & N^e_{i,j} \neq |J_i| \end{cases}$$
$$\forall i\in(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_j),\ j\in J \tag{6}$$

$$k_{b,j} = \max\Big(j, |K| - \sum_{i\in(I_j\cup I_{j+1}\cup\cdots\cup I_{\bar{j}})} n_i + 1, |K| - \Big[\sum_{i\in(I_j\cup I_{j+1}\cup\cdots\cup I_{\bar{j}})} P^b_{i,j}\Big] + 1\Big) \quad \forall j\in J \tag{7}$$

$$k_{e,j} = \min\Big(|K| - |J| + j, \sum_{i\in(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_j)} n_i, \Big[\sum_{i\in(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_j)} P^e_{i,j}\Big]\Big) \quad \forall j\in J \tag{8}$$

式(5) 和(6) 分别估计了设备 $j, j+1, \cdots, \bar{j}$、$1, 2, \cdots, j$ 所能处理每一种订单 i 的个数 $P^b_{i,j}$ 和 $P^e_{i,j}$(在计算

时, 按浮点数估计), 而式(7)和(8)给出了每一个设备所能分配时间间隙的最小编号和最大编号. 其中, $N^b_{i,j}$和$N^e_{i,j}$分别表示设备 $j, j+1, \cdots, \bar{j}$、$1, 2, \cdots, j$ 能生产订单 i 的个数, μ 为大于等于 1 的任何实数, $[\cdot]$表示大于等于浮点数的最小正整数. 当订单 i 只能在设备 $j, j+1, \cdots, \bar{j}$ 上生产时, 即 $N^b_{i,j}=|J_i|$, $P^b_{i,j}=n_i$; 当订单 i 不仅可以在 $j, j+1, \cdots, \bar{j}$ 其中一些设备上生产, 而且可以在 $1, 2, \cdots, j-1$ 其中一些设备上生产时, 即 $N^b_{i,j}\neq|J_i|$, 那么 $j, j+1, \cdots, \bar{j}$ 可能生产第 i 种订单的数量为 $P^b_{i,j}=\mu\cdot N^b_{i,j}\cdot n_i/|J_i|$. 同理可以计算出设备 $1, 2, \cdots, j$ 所能处理第 i 种订单的个数 $P^e_{i,j}$. 根据(5)和(6)就可以估计出每个设备可能分配时间间隙的最小编号和最大编号, 具体表达见(7)和(8).

很明显, 式(7)和(8)符合启发性规则引入的基本要求. 而且, 当 μ 取值较小时, 按启发性规则二估计出的每个设备可能分配时间间隙数量少于等于启发性规则一所估计的时间间隙数量. 虽然由(7)和(8)估计出的每个设备可能分配的时间间隙是近似的, 但是当 μ 取适当的值时, 使用该启发性规则能得到最优解.

3　模型的重新表达(Model Reformulation)

引入启发性规则后, 估计出了每个设备可能分配的时间间隙集合 K_j, 减少了整数变量 $Y_{j,k}$. 当一些订单不能在每个设备上生产时, 启发性规则的引入还能减少整数变量 $X_{i,k}$的数量. 因为, 对于一个给定的订单 i, 它所能分配的时间间隙集合 $K_i=\bigcup_{j\in J_i}K_j$, 也就是说, 只有当 $k\in K_i$ 时, $X_{i,k}$才可能等于 1, 而当 $k\in K\setminus K_i$, $X_{i,k}$必等于 0. 值得指出的是, 一旦定义了每个设备可能分配的时间间隙集合 K_j, 也就相应定义了任一时间间隙 k 可能被分配的设备集 J_k. 同理, 定义了任一订单 i 可能分配的时间间隙集合 K_i, 也就相应定义了每个时间间隙 k 可能分配的订单集 I_k.

根据上述的基本思想, 本节重新表达本文第一部分提出的模型. 为了便于理解, 原模型经重新表达的式子标号都带上“'”, 而那不带“'”与原表达相同.

订单和设备分配到时间间隙

3.1　订单分配给时间间隙

$$\sum_{i\in I_k}X_{i,k}=1\quad\forall k\in K \tag{9}$$

$$\sum_{k\in K_i}X_{i,k}=n_i\quad\forall i\in I \tag{10}$$

设备分配给时间间隙的约束

$$\sum_{j\in J_k}Y_{j,k}=1\quad\forall k\in K \tag{11}$$

$$Y_{j,k}+Y_{j',k'}\leqslant 1$$
$$\forall k,k'\in K,\ j\in J_k,\ k'\geqslant k,\ j>j'\in J_{k'} \tag{12}$$

订单生产与设备间的关系

$$X_{i,k}-\sum_{j\in J_i\cap J_k}Y_{j,k}\leqslant 0$$
$$\forall i\in I_k,\ k\in K \tag{13}$$

$$Y_{j,k}-\sum_{i\in I_j\cap I_k}X_{i,k}\leqslant 0$$
$$\forall j\in J_k,\ k\in K \tag{14}$$

禁止生产子序列的表达

$$X_{i,k}+Y_{j,k}+\sum_{i'\in I_j\cap I_{k+1},(i,i')\in FS}X_{i',k+1}+Y_{j',k+1}\leqslant 3$$
$$\forall j\in J,\ i\in I_j\cap I_k,\ k\in K_j\setminus\{\bar{k}_j\} \tag{15}$$

3.2　订单在设备上生产时间约束

辅助变量的引进

$$X_{i,k}=\sum_{j\in J_k\cap J_i}W_{i,j,k}$$
$$\forall i\in I_k,\ k\in K \tag{16}$$

$$Y_{j,k}=\sum_{i\in I_j\cap I_k}W_{i,j,k}$$
$$\forall j\in J_k,\ k\in K \tag{17}$$

处理时间的约束

$$Te_{k,j}-Ts_{k,j}=\sum_{i\in I_j\cap I_k}W_{i,j,k}P_{i,j}$$
$$\forall j\in J,\ k\in K_j \tag{18}$$

不同的订单在同一设备上处理的约束

$$Ts_{k+1,j}-Te_{k,j}\geqslant\sum_{i'\in I_j\cap I_{k+1}(i,i')\notin FS}W_{i',j,k+1}\tau_{i,i',j}-U(1-W_{i,j,k})$$
$$\forall j\in J,\ i\in I_j\cap I_k,\ k\in K_j\setminus\{\bar{k}_j\} \tag{19}$$

$$Ts_{k+1,j}-Te_{k,j}\geqslant 0$$
$$\forall j\in J,\ k\in K_j\setminus\{\bar{k}_j\} \tag{20}$$

订单发布时间和设备准备时间约束

$$Ts_{k,j}\geqslant\sum_{i\in I_j\cap I_k}W_{i,j,k}\max(RTU_j,RTP_i)$$
$$\forall j\in J,\ k\in K_j \tag{21}$$

3.3　目标函数

生产时间的优化

$$MS\geqslant Te_{\bar{k}_j,j}\qquad\forall j\in J \tag{22}$$

$$\min MS \tag{23}$$

最小化平均提前完成时间

$$Te_{k,j}\leqslant M+\sum_{i\in I_j\cap I_k}(D_i-M)W_{i,j,k}$$

$$\forall j \in J, k \in K_j \tag{24}$$

$$Te_{k,j} + E_k \geqslant D_i \cdot W_{i,j,k}$$
$$\forall j \in J, k \in K_j,\ i \in I_j \cap I_k \tag{25}$$

$$\min \sum_{k \in K_k} E \tag{26}$$

最小化平均拖延完成时间

$$Te_{k,j} \leqslant (D_i - M) \cdot W_{i,j,k} + T_k + M$$
$$\forall j \in J, k \in K_j,\ i \in I_j \cap I_k \tag{27}$$

$$\min \sum_{k \in K} T_k \tag{28}$$

最小化拖延完成订单数

$$T_k - M \cdot NT_k \leqslant 0 \qquad \forall i \in I \tag{29}$$

$$\min \sum_{k \in K} NT_k \tag{30}$$

最小化拖延完成时间和提前完成时间

$$\min \sum_{k \in K} (T_k + \frac{E_k}{\sum_{i \in I} n_i + 1}) \tag{31}$$

从以上的表达可看出, 引入启发性规则充分利用了模型和过程的特点. 经重新表达的模型减少了整数变量、连续变量、约束的数量, 而且比本文第一部分提出的模型表达更紧凑. 第 5 节计算表明, 重新表达的模型相对于原先的模型求解时间更短. 当每个设备上至少生产一个订单时, 利用启发性规则一或启发性规则二, 在 μ 取适当值的情况下一般能得到最优解.

4　评注(Remarks)

• 优化生产时间、提前完成时间、拖延完成时间、拖延完成订单数、拖延提前完成时间需确定 U 和 M. 对于一个实际的问题, U 和 M 取值越小, 模型表达越紧, 求解时间越短. 对于任一设备 j, 时间间隙 $k+1$ 的开始时间和时间间隙 k 的结束时间最多大于等于所有订单的最大顺序相关建立时间, 所以 $U = \max\{\tau_{i,i',j},\ \forall i, i' \in I, j \in J, (i, i') \notin FS\}$. 当优化订单生产提前完成时间时, $M = \max\{D_i, \forall i \in I\}$; 当优化订单拖延完成时间、拖延完成订单数和拖延提前完成时间时, $M = \max\{D_i,\ \forall i \in I\} + M'$. 其中, M' 为大于等于 0 的正数, 其值根据实际调度问题确定.

• 使用启发性规则二, 需要确定 μ. μ 取值越大, 估计每个设备可能分配时间间隙的数量越多, 相应减少整数变量 $X_{i,k}$ 与 $Y_{j,k}$、连续变量和约束的数量越少. 当 $1 \leqslant \mu \leqslant 1.5$ 时, 如果设备的准备时间、各个订单生产时间及每个设备所能处理的订单集包含元素个数相差不大, 一般能得到最优解.

• 在实际计算中, 当优化生产时间时, 如果一个设备上处理订单的总处理时间比 MS 小时, 上述模型优化结果不能以较小顺序相关建立时间排序种类不同的订单. 因此在计算时将目标函数改为:

$$\min MS + \sum_{j \in J} \epsilon Te_{\bar{k}_j, j} \tag{32}$$

其中 ϵ 是一个比较小的正数. 目标函数(32) 不但要求总处理时间 MS 最小, 而且要求各个设备处理时间最小.

• 在优化订单生产提前完成时间时, 如果模型较大, 可能出现线性规划退化的情况. 为了克服这一问题, 将目标函数改为:

$$\min \sum_{k \in K} E_k + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} \sum_{i \in I_k \cap I_j} \epsilon \cdot W_{i,j,k} \tag{33}$$

• 按本文第一部分定义订单提前完成时间和拖延完成时间适用于包含多个同种订单的调度问题, 但是目标函数不能对每个订单加权. 如果调度问题只考虑每种订单唯一的情况, 可将(17) - (23) 式对应改为:

$$Te_{k,j} + E_i \geqslant D_i \cdot W_{i,j,k}$$
$$\forall j \in J,\ k \in K_j,\ i \in I_j \cap I_k \tag{34}$$

$$\min \sum_{i \in I} p_i \cdot E_i \tag{35}$$

$$Te_{k,j} \leqslant (D_i - M) \cdot W_{i,j,k} + T_i + M$$
$$\forall j \in J,\ k \in K_j,\ i \in I_j \cap I_k \tag{36}$$

$$\min \sum_{i \in I} p_i \cdot T_i \tag{37}$$

$$T_i - M \cdot NT_i \leqslant 0 \qquad \forall i \in I \tag{38}$$

$$\min \sum_{i \in I} NT_i \tag{39}$$

$$\min \sum_{i \in I} (T_i + \frac{E_i}{|I| + 1}) \tag{40}$$

其中, E_i 为订单 i 生产提前完成时间; T_i 为订单 i 生产拖延完成时间; NT_i 表示订单 i 生产拖延完成, 0 ≠1 变量; p_i 为订单 i 的权值.

5　计算实例(Examples)

本节给出一些计算例子. 所有计算实例考虑 15 种订单在 4 条并行处理线上生产. 每一种订单在各条处理线上的处理时间及设备准备时间见表 1. 表 1 中的空白表示该表格对应的订单不能在对应的设备上处理. 表 2 给出了各条生产线处理不同订单的顺序相关建立时间. 标明“FS”的表格表示该表格所对应的订单属于禁止生产子序列. 如订单 1 和 3 所对应的表格标为 FS, 表明这两种订单分配到同一设备上生产时, 订单 3 不能紧接在订单 1 后生产.

表 **1** 各个订单在不同设备上的处理时间及设备准备时间(天)

Tab. **1** Processing times and unit ready times (in days)

定单	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	设备准备时间
设备1	1.70		1.25			2.40			1.60	2.60			1.75			0
设备2				1.70	1.40	1.80				1.90				1.60	1.48	3
设备3		0.90	1.10				1.05				0.55	0.85	1.00			2
设备4					0.85		1.65	2.10				0.70			1.39	3

本文所有计算在兼容PC机下完成, 该机的CPU 是Pentrum Ⅲ733、内存为128M. 优化求解使用了SAS VER. 8.0 中LP PROC 软件包的分枝定界法.

表 **2** 各个设备处理不同订单的顺序相关建立时间

Tab. **2** Sequence-dependent setup times (in days) for All examples

定单	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	定单发布时间
1			FS			0.65			0.85	0.4			0.35			0.0
2			1.10				FS				0.25	FS	0.70			1.2
3	1.00	0.15				FS	0.30		1.60	0.20	0.50	0.75	FS			0.0
4					0.05	FS				0.50				0.70	0.45	1.4
5				0.30		0.70	0.90	0.60		FS		0.90		0.80	FS	0.0
6	1.40		0.30	0.70	FS				1.20	FS			1.20	0.55	0.20	2.0
7		1.80	FS		0.85			0.45			1.00	1.10	FS		FS	3.0
8					FS		1.65					1.05			0.10	0.0
9	2.10		1.25			0.80				0.65			0.85			2.0
10	1.50		0.60	0.75	0.50	FS			0.70				1.15	1.30	0.95	1.8
11		0.95	FS				FS					0.15	0.15			0.0
12		FS	0.80		0.40		1.00	0.20			0.60		FS		1.30	1.5
13	0.30	0.55	1.30			1.30	1.55		0.25	1.15	1.40	0.40				0.0
14				1.45	0.80	0.50				0.35					0.75	0.0
15				0.20	FS	0.40	1.20	0.30		0.80		0.30		1.05		2.5

5.1 每种订单唯一的调度问题求解

本节以优化所有订单生产时间和最小化订单生产提前拖延完成时间为例, 研究不采用启发性规则、采用启发性规则一或二对计算量和目标函数的影响. 为了叙述的方便, 分别把不采用启发性规则、采用启发性规则一和二的模型叫 $M1$、$M2$、$M3$. 利用模型 $M1$、$M2$、$M3$ 分别优化 8、9、10、12 和 15 个订单的生产时所需 0-1 变量、连续变量、约束数量、CPU 花费时间、查找节点次数、每个设备估计所能分配时间间隙的数量和使用启发性规则 2 所使用 μ 值见表 3. 对于优化 15 个订单生产时间的调度问题, 表 4 给出了每个设备所处理的订单及其排序及每个订单处理的开始和结束时间.

从表 4 可看出, 每一个订单只能在能生产该订单的设备上生产, 它的生产开始时间大于等于其发布时间和设备准备时间. 一个设备处理完一个订单后, 紧接在其后生产的只能是那些不属于禁止生产子序列的订单. 而且分配到同一设备生产的订单集按顺序相关建立时间总和最小排序.

当每一种订单都可以在各个并行的设备上处理且只包含一个订单时, 如果不考虑各种启发性规则, 本文提出的模型包含整数变量 $|I|^2+|J|\cdot|I|$ 个. 在相同的情况下, 使用 Pinto et al.[1]提出的模型, 整数变量为 $|I|^2\cdot|J|$ 个. 在处理实际较大的工业调度问题时, 本文提出的模型显然比 Pinto et al.[1]提出的模型所包含整数变量少. 正如本文第一部分前言指出的那样, 整数规划问题求解时间与整数变量的多少密切相关. 在相同的条件下, 整数变量越少, 求解时间越短. 从表 3 可看出, 即使不使用启发性规则, 本文提出的模型能在较短的时间内求解各个调度问题. 例如求解 10 个订单的调度问题, 只需花费 CPU 时间 114.16s.

从表 3 可看出, 启发性规则的引入不但减小了整数变量、连续变量、约束的个数, 而且减小了模型的求解时间. 特别有意义的是: 应用启发性规则一、二还能得到最优解. 例如当优化 10 个订单的生产时间, 不采用启发性规则, 模型包含 140 个整数变量、257 个连续变量、994 个约束, 需花费 114.16s, 查找

507 个节点才能得到最优解. 而应用启发性规则一, 模型包含整数变量 75 个、连续变量 101 个、约束 334 个, 只需花费 2. 74s, 查找 455 次节点就能得到最优解. 利用启发性规则二, 当 $\mu=1.1$, 进一步减少了整数变量、连续变量和约束的数量, 花费时间仅为 0. 82s, 相当于不采用启发性规则的 7. 2% , 相当于采用启发性规则一的 29. 9% .

表 3 优化生产时间模型大小和计算要求

Tab. 3　Model sizes and computational requirements for scheduling problems

订单数	模型	0- 1 变量个数	连续变量个数	约束数量	MS	CPU 花费时间	查找节点次数	每个设备可能分配时间间隙	μ
8 个订单	$M1$	96	161	661	6. 45	6. 88	151	$U1$: 1-8; $U2$: 1-8; $U3$: 1-8; $U4$: 1-8	-
	$M2$	52	71	227	6. 46	0. 44	106	$U1$: 1-3; $U2$: 2-5; $U3$: 4-7; $U4$: 6-8	-
	$M3$	52	71	227	6. 45	0. 44	106	$U1$: 1-3; $U2$: 2-5; $U3$: 4-7; $U4$: 6-8	1. 1
	$M3$	32	52	131	7. 20	0. 13	16	$U1$: 1-2; $U2$: 3-4; $U3$: 5-6; $U4$: 7-8	1. 0
9 个订单	$M1$	117	190	799	7. 20	22. 63	227	$U1$: 1-9; $U2$: 1-9; $U3$: 1-9; $U4$: 1-9	-
	$M2$	60	80	257	7. 20	0. 79	190	$U1$: 1-4; $U2$: 3-6; $U3$: 5-8; $U4$: 7-9	-
	$M3$	60	80	257	7. 20	0. 79	190	$U1$: 1-4; $U2$: 3-6; $U3$: 5-8; $U4$: 7-9	1. 1
	$M3$	39	49	158	7. 20	0. 45	26	$U1$: 1-3; $U2$: 4-5; $U3$: 6-7; $U4$: 8-9	1. 0
10 个订单	$M1$	140	257	994	7. 20	114. 16	507	$U1$: 1-9; $U2$: 1-9; $U3$: 1-9; $U4$: 1-9	-
	$M2$	75	101	334	7. 20	2. 74	455	$U1$: 1-5; $U2$: 3-7; $U3$: 6-9; $U4$: 8-10	-
	$M3$	68	88	292	7. 20	0. 82	187	$U1$: 1-4; $U2$: 4-7; $U3$: 6-9; $U4$: 8-10	1. 1
	$M3$	53	67	222	8. 65	0. 73	261	$U1$: 1-4; $U2$: 4-6; $U3$: 7-8; $U4$: 9-10	1. 0
12 个订单	$M2$	99	132	437	7. 85*	17. 04	1939	$U1$: 1-5; $U2$: 3-7; $U3$: 6-11; $U4$: 9-12	-
	$M3$	85	106	356	7. 85	6. 49	356	$U1$: 1-4; $U2$: 4-7; $U3$: 6-10; $U4$: 10-12	1. 1
	$M3$	74	93	308	8. 65	7. 63	2210	$U1$: 1-4; $U2$: 4-6; $U3$: 7-10; $U4$: 10-12	1. 0
15 个订单	$M3$	135	165	564	9. 25	867. 39	78311	$U1$: 1-5; $U2$: 4-9; $U3$: 8-13; $U4$: 12-15	1. 1
	$M3$	102	118	408	10. 20	260. 57	55264	$U1$: 1-4; $U2$: 5-8; $U3$: 9-12; $U4$: 13-15	1. 0

表 4　15 个订单生产时间优化结果

Tab. 4　Results for optimal scheduling involving 15 orders

设备	时间间隙	订单	处理时间	顺序相关建立时间	处理开始时间	处理结束时间
设备 1	1	1	1. 70	-	0. 00	1. 70
	2	13	1. 75	0. 35	2. 05	3. 80
	3	9	1. 60	0. 25	4. 05	5. 65
	4	6	2. 40	0. 80	6. 45	8. 85
设备 2	5	4	1. 70	-	3. 00	4. 70
	6	14	1. 55	0. 75	5. 45	7. 00
	7	10	1. 90	0. 35	7. 35	9. 25
设备 3	8	2	0. 90	-	2. 00	2. 90
	9	11	0. 55	0. 25	3. 15	3. 70
	10	12	0. 85	0. 15	3. 85	4. 70
	11	3	1. 10	0. 80	5. 50	6. 60
	12	7	1. 05	0. 30	6. 90	7. 95
设备 4	13	5	0. 85	-	3. 00	3. 85
	14	8	2. 10	0. 60	4. 45	6. 55
	15	15	1. 39	0. 10	6. 65	8. 04

从表 3 还可看出, 当订单数比较少, 而且 μ 取值比较大时, 启发性规则一和二是等价的(见使用 $M2$ 和 $M3$、$\mu=1.1$, 优化 8、9 个订单的生产时间). 当订单数比较多时, 启发性规则二比启发性规则一更能有效地减小模型的大小和计算量(见使用 $M2$ 和 $M3$、$\mu=1.1$, 优化 10、12 个订单的生产时间). 但是应用启发性规则二, μ 取得太小时(比如 $\mu=1.0$), 因为估计每个设备所能分配的时间间隙过少, 而导致不能得到最优解. 但是从表 3 中可看出, 即使 $\mu=1.0$, 得到的解相对于最优解仍相差不大.

本文提出的模型和启发性规则不但适用于优化订单生产时间, 而且适用于优化平均提前完成时间、平均拖延完成时间、拖延完成订单数及拖延提前完成时间. 为了节省篇幅, 本文仅给出了 12 个订单拖

延提前完成时间的优化结果. 各个订单生产开始、结束时间(见表 5). 使用启发性规则 2, 当 $\mu=1.1$, $M=9$ 时, 该问题包含 85 个 0-1 变量, 129 个连续变量, 约束 498 个, 找到最优解花费时间为 23.21s.

表 5 12 个订单拖延提前完成时间优化结果(“-”表示提前完成时间)

Tab.5 Results for optimal scheduling involving 12 orders (“-” denotes earliness)

设备	时间间隙	订单	处理时间	顺序相关建立时间	处理开始时间	处理结束时间	交货期	延迟
设备 1	1	1	1.70	-	0.00	1.70	2	-0.30
	2	10	2.60	0.40	2.10	4.70	5	-0.30
	3	9		0.70	5.40	7.00	7	0.00
设备 2	4	6	1.80	-	3.00	4.80	5	-0.20
	5	4	1.70	0.05	5.50	7.20	7	0.20
设备 3	6	3	1.10	-	2.00	3.10	3	0.10
	7	7	1.05	0.30	3.40	4.45	4	0.45
	8	11	0.55	1.00	5.45	6.00	6	0.00
	9	2	0.90	0.95	7.10	8.00	8	0.00
设备 4	10	12	0.70	-	3.05	3.75	4	-0.25
	11	5	0.85	0.40	4.15	5.00	5	0.00
	12	8	2.10	0.60	5.90	8.00	8	0.00

5.2 包含多个同种订单的调度问题求解

本节验证该模型对包含多个同种订单调度问题求解的有效性. 计算实验 1 和 2 包含 10 种订单, 每种订单包含的订单数见表 6. 实验 1 优化订单的生产时间, 实验 2 优化订单的生产提前完成时间. 实验 1 和 2 的模型大小和计算要求见表 7, 优化结果、各个订单的处理顺序及处理开始结束时间分别见表 8 和表 9.

表 6 各种订单包含的订单数

Tab.6 Number of orders belonging to each category for Example 1 and 2

订单	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
实验 1	2	2	3	2	2	2	3	2	1	1
实验 2	1	2	3	1	4	2	4	2	1	2

表 7 实验模型大小和计算要求

Tab.7 Model sizes and computational requirements for Example **1** and **2**

	0-1 变量个数	连续变量个数	约束数量	目标函数	CPU 花费时间	查找节点次数	每个设备可能分配时间间隙	备注
实验 1	133	175	602	10.95	483.62	41020	$U1$: 1-8; $U2$: 5-12; $U3$: 10-17; $U4$: 15-20	$\mu=1.4$
实验 2	140	194	776	26.35	469.62	3033	$U1$: 1-7; $U2$: 5-12; $U3$: 10-18; $U4$: 15-22	$M=1.4$, $M=12$

在实际的调度中, 一种产品可能需要生产多个批次(每个批次表示一个订单)来满足用户的需求. 因此一个合理的调度算法应当允许每种订单包含多个订单. 当每一种订单均可以在各个并行的设备上处理且包含一个或多个订单时, 如果不考虑各种启发性规则, 本文提出的模型包含整数变量 $|I|\cdot\sum_{i\in I} n_i+|J|\cdot\sum_{i\in I} n_i$ 个. 在上述条件下, 使用 Méndez et al.[6] 提出的模型包含的整数变量个数为 $(\sum_{i\in I} n_i)\cdot(\sum_{i\in I} n_i-1)+|J|\cdot\sum_{i\in I} n_i$. 在处理实际较大的工业调度问题时, 本文提出的模型显然比 Méndez et al.[6]提出模型的整数变量少.

本文提出的启发性规则同样适用于包含多个同种订单的调度问题. 将它应用到实际的调度问题, 将极大地减小模型的大小和计算量. 从表 7 可看出, 应用启发性规则 2, 当 $\mu=1.4$ 时, 优化 20 个订单生产时间只需花费 483.62s, 而最小化 22 个订单提前完成时间的只需花费 469.62s. 比较表 7 和表 3 优化 15 个订单的调度问题可发现, 虽然表 7 实验 1 和 2 分别优化了 20 个订单的生产时间和 22 个订单的生产提前完成时间, 但是与表 3 优化 15 个订单的生产时间相比: 调度问题模型大小相差不大, 计算时间却减少将近 1 倍. 因此本文建立的调度模型对包含多个同种订单的调度问题非常有效.

表 8 20 个订单生产时间优化结果

Tab. 8 Results for optimal scheduling involving 20 orders

设备	时间间隙	订单	处理时间	顺序相关建立时间	处理开始时间	处理结束时间
设备 1	1	3	1.25	-	0.00	1.25
	2	1	1.70	1.00	2.25	3.95
	3	1	1.70	0.00	3.95	5.65
	4	10	2.60	0.40	6.05	8.65
	5	9	1.60	0.70	9.35	10.95
设备 2	6	6	1.80	-	3.00	4.80
	7	6	1.80	0.00	4.80	6.60
	8	4	1.70	0.70	7.30	9.00
	9	4	1.70	0.00	9.00	10.70
设备 3	10	2	0.90	-	2.00	2.90
	11	2	0.90	0.00	2.90	3.80
	12	3	1.10	1.10	4.90	6.00
	13	3	1.10	0.00	6.00	7.10
	14	7	1.05	0.30	7.40	8.45
	15	7	1.05	0.00	8.45	9.50
	16	7	1.05	0.00	9.50	10.55
设备 4	17	5	0.85	-	3.00	3.85
	18	5	0.85	0.00	3.85	4.70
	19	8	2.10	0.60	5.30	7.40
	20	8	2.10	0.00	7.40	9.50

表 9 22 个订单生产提前完成时间优化结果

Tab. 9 Results for Optimal Scheduling involving 22 orders

设备	时间间隙	订单	处理时间	顺序相关建立时间	处理开始时间	处理结束时间	交货期	提前时间
设备 1	1	1	1.70	-	0.30	2.00	2	0.00
	2	9	1.60	0.85	3.40	5.00	5	0.00
	3	3	1.25	1.25	6.70	7.95	11	3.05
	4	3	1.25	0.00	7.95	9.20	11	1.80
	5	10	2.60	0.20	9.40	12.00	12	0.00
设备 2	6	6	1.80	-	3.00	4.80	7	2.20
	7	6	1.80	0.00	4.80	6.60	7	0.40
	8	4	1.70	0.70	7.30	9.00	9	0.00
	9	10	1.90	0.70	10.10	12.00	12	0.00
设备 3	10	2	0.90	-	2.20	3.10	4	0.90
	11	2	0.90	0.00	3.10	4.00	4	0.00
	12	3	1.10	1.10	5.40	6.50	11	4.50
	13	7	1.05	0.30	6.80	7.85	11	3.15
	14	7	1.05	0.00	7.85	8.90	11	2.10
	15	7	1.05	0.00	8.90	9.95	11	1.05
	16	7	1.05	0.00	9.95	11.00	11	0.00
设备 4	17	5	0.85	-	3.60	4.45	7	2.55
	18	5	0.85	0.00	4.45	5.30	7	1.70
	19	5	0.85	0.00	5.30	6.15	7	0.85
	20	5	0.85	0.00	6.15	7.00	7	0.00
	21	8	2.10	0.60	7.80	9.90	12	2.10
	22	8	2.10	0.00	9.90	12.00	12	0.00

6 结论(Conclusion)

本文第一部分所建立数学模型不但表达了多产品单阶段批处理过程的多类约束, 而且能优化各种目标函数. 在此基础上, 本文进一步提出了两种启发性规则, 并将它们有机溶入调度模型. 这些启发性规则的应用不但能减少模型整数变量、连续变量和约

束的数量, 使得模型表达更紧, 而且能得到最优解. 尤其有意义的是: 本文提出的模型和启发性规则不但适用于每种订单唯一的情况, 而且适用于包含多个同种订单的调度问题. 模型的求解使用了分枝定界法. 大量的计算实例表明该模型具有良好的计算性能, 尤其对包含多个同种订单的调度问题求解更为显著.

参 考 文 献 (**References**)

1 Pinto J M, Grossmann I E. Assignment and Sequencing model for scheduling models for the scheduling of process systems. Annals of Operation Research, 1998, **81**: 433~ 466

2 Pinto J M, Grossmann I. E A continuous time mixed linear programming for short term scheduling of multistage batch plants, Ind. Eng. Chem. Res., 1995, **34**: 3037~ 3051

3 Pinto J M, Grossmann I. E A continuous- time MILP model for short term scheduling of multistage batch plants with pre-ordering constraints, Computers & Chemical Engineering, 1996, **20**: 1197~ 1202

4 Cerdá J, Henning G P, Grossmann I E. A mixed-integer linear programming model for short-term scheduling of single-stage multiproduct batch plants with parallel lines. Ind. Eng. Chem. Res., 1997, **36**: 1795~ 1707

5 Hui C-W, Gupta A. A novel MILP formulation for short-term scheduling of multistage multi- product batch plants, Computers & Chemical Engineering, 2000, **24**: 1611~ 1617

6 Méndez C A, Henning G P, Cerdá J. Optimal scheduling of batch plants satisfying multiple product orders with different due-dates. Computers & Chemical Engineering, 2000, **24**: 2223 ~ 2245

作者简介

陈昌领(1972-), 上海交通大学在读博士. 研究领域为批处理过程调度、过程控制.

宗学军(1970-), 教师. 研究领域为过程控制与优化的研究与应用.

孙 鹏(1972-), 上海交通大学在读博士. 研究领域为过程控制、网络控制.

(上接第 201 页)

参 考 文 献 (**References**)

1 Dorigo M, Maniezzo V, Colorni A. Positive Feedback as a Search Strategy, Technical Report No. 91-016. Politecnico di Milano, Italy. 1991

2 Dorigo M., Gambardella L. Ant colonies for the travelling salesman problem. Biosystems, 1997, **43**(2): 73~ 81

3 Maniezzo V, Colorni A, Dorigo M. The Ant System Applied to the Quadratic Assignment Problem. Tech. Rep. IRIDIA/94-28, 1994. Université Libre de Bruxelles, Belgium

4 Colorni A, Dorigo M, Maniezzo V, et al. Ant System for job-shop scheduling. Belgian Juarnal of Operations Research Statistics and Computer Science, 1994, **34**(1): 39~ 53

5 Bullnheimer B, Richard F. Hartl, C. Strauss. A New Rank Based Version of the Ant System: A Computational Study. Technical report, 1997. University of Viena, Institute of Management Science

6 庄昌文, 范明钰等. 基于协同工作方式的一种蚁群布线系统. 半导体学报, 1999, **20**(5): 400~ 406

7 Chang C S, Tian L *et al.* A new approach to fault section estimation in power systems using Ant system. Electric Power Systems Research, 1999, **49**(1): 63~ 70

8 Maniezzo, Carbonaro. An ANTS heuristic for the frequency assignment problem. Future Generation Computer Systems, 2000, **20**: 927~ 935

9 Bullnheimer B, R F Hartl, *et al.* Applying the Ant System to the Vehicle Routing Problem. In: Voss S., Martello S., Osman I. H., Roucairol C. (eds.), Meta- Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization, Kluwer, Boston, 1999: 285~ 296

作者简介

覃刚力(1975-), 女, 博士研究生. 研究领域为机器学习及多智能体系统的建模、学习和进化机制等.

杨家本(1935-), 男, 教授. 研究领域为知识系统、复杂系统建模、优化以及多智能体系统的研究、开发和应用.