具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的离散系统的极点配置

袁立嵩　蒋慰孙
（华东理工大学自动化研究所，上海，200237）

摘要　本文主要研究具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的线性离散系统的极点配置问题．首先将这一问题转化为一个具有 H_∞ 性能和系统闭环极点位置约束的系统 H_2 性能优化问题，进而通过引入一个辅助性能函数，进一步将其转化成有一个矩阵方程约束的辅助性能函数的最小化优化问题，并给出这个问题静态输出反馈和状态反馈控制器的解的表达式．

关键词：离散系统　反馈控制　极点配置　H_2/H_∞ 混合控制

1　引言

极点配置控制器设计是控制系统设计的一个最古老也是最常用的方法，由于控制系统的动态特性与其闭环极点有着直接的关系，因此，自控制理论诞生以来极点配置技术一直受到控制界的广泛关注，发展至今相对来说也较为成熟．但长期以来，人们大多研究的是固定极点配置问题，即将系统的极点配置在某一特定位置，而系统的动态特性并不是由系统的闭环极点唯一确定，它往往与系统的其他参数有关，如系统的零点等，并且在实际系统设计中不只考虑系统的动态特性，常常有其他性能要求，如系统的鲁棒性等，因此如果过分强调系统闭环系统的极点位于复左半平面的某一区域，即所谓的区域极点配置问题，这样多余的系统设计自由度可以用于满足系统的其他性能要求．

在 LQR/LQG 问题中，由于闭环系统的极点与性能函数中的加权阵的选择有着密切的关系，因而将系统的区域极点配置与 LQR/LQG 设计相结合，进行控制系统设计是一个很自然的想法，这方面前人已做了很多研究，并得到了许多有价值的成果[1,2]．

H_2/H_∞ 混合控制设计是近年来提出的一种新的控制系统的设计方法．由于 H_2 最优控制系统具有许多优良特性，但鲁棒性较差，而与其相反，H_∞ 最优控制系统能较好的解决系统的扰动抑制和鲁棒性问题，但其动态品质一般较差，因此如果将上述两种方法结合起来进行控制系统的设计，这样既可以解决 H_2 最优控制系统的抗干扰和鲁棒性问题，又可以解决 H_∞ 最优控制系统的性能问题，因此，这一课题一提出就得到了国内外众多学者的重视，短短三四年间得到了很大发展，文献[3]对近年来有关成果进行了综述．

通过以上分析，如何将系统的区域极点配置技术与系统的 H_2/H_∞ 混合控制设计相结合进行控制系统的设计，这也是一个很有意义并且值得深入研究的课题．据此文献[4]首先提出了这一问题，并针对连续系统的情况进行了研究，得到了一些很有价值的结果．

上述的结果大多是针对连续系统的，而相应的离散系统的有关结果较少，并且有关把系统的区域极点配置技术与 H_2/H_∞ 混合控制设计方法结合起来进行控制系统设计的结果，至今也未见报道．本文试图将文献[4]中处理连续系统的有关问题的思想和方法引入离散系统的设计中来，首先将原问题转化为一个具有 H_∞ 性能和闭环极点位置约束的系统 H_2 性能优化问题，

收稿日期：1993－01－11．

进而引入一个辅助性能函数，将其进一步转化成具有一个矩阵方程约束的辅助性能的优化问题，然后通过对这个优化问题的求解来得到离散系统的具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的系统闭环极点配置问题的解.

本文中一些主要符号定义如下：

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right]:=C(zI_n-A)^{-1}B+D$$

$(A)^T$：矩阵的转置；

$G^*(z)$：矩阵的共轭转置；

$\mathrm{tr}(A)$：矩阵的迹；

$\lambda(A)$：矩阵的特征值；

$\Lambda(A)$：矩阵的特征值集；

$\sigma(A)$：矩阵的奇异值；

$A\times B$：矩阵 A 和 B 的 Kronecker 积；

$\mathrm{vec}(A)$：矩阵的列拉直；

$\mathrm{vec}^{-1}(A)$：矩阵的列反拉直；

$A>,\geqslant,\leqslant,<0$：分别表示矩阵 A 为正定，半正定，负定，半负定；

$A>B$：$A-B$ 正定；

$\|G(z)\|_2=[\mathrm{tr}(G(z)^*G(z))]^{1/2}$；

$\|G(z)\|_\infty=\sigma_{\max}(G(e^{j\theta}))$.

2 问题描述

定义 2.1[2] λ 为 A 的特征值，如果 $\mathrm{rank}[A-\lambda I_n, B]=n$，则称 λ 为 A 的 B 可控特征值.

引理 2.1[2] 矩阵对(A,B)为可镇定的充要条件为 A 的所有位于单位圆外的特征值是 B 可控的；且(A,B)可控的充要条件为 A 的所有特征值是 B 可控的.

令 $C(r)$为图 1 所示的圆域，$r\leqslant 1$. 方框图如图 2 所示.

定义 2.2 如果 A 的所有不属于 $C(r)$的特征值是 B 可控的，则称(A,B)是 $C(r)$可配置的.

对于离散线性定常系统

$$X(k+1)=AX(k)+BU(k)+D\omega \tag{1a}$$

$$Y(k)=CX(k) \tag{1b}$$

$$Z_\infty(k)=E_{1\infty}X(k)+E_{2\infty}U(k) \tag{1c}$$

$$Z_2(k)=E_{12}X(k)+E_{22}U(k) \tag{1d}$$

$$U(k)=KY(k) \tag{1e}$$

则其开环传递函数具有状态空间实现：

$$G(z)=\left[\begin{array}{c:cc} A & B & D \\ \hdashline C & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ E_{1\infty} & E_{2\infty} & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

假设
$$E_{12}^TE_{22}=0;\quad E_{1\infty}^TE_{2\infty}=0 \tag{3}$$

令
$$A_c=(A+BKC);\quad V=DD^T \tag{4a}$$

$$R_{12}=E_{12}^TE_{12};\quad R_{22}=E_{22}^TE_{22} \tag{4b}$$

$$R_{1\infty}=E_{1\infty}^TE_{1\infty};\quad R_{2\infty}=E_{2\infty}^TE_{2\infty} \tag{4c}$$

$$E_2=E_{12}+E_{22}KC;\quad R_2=E_2^TE_2=R_{12}+C^TK^TR_{22}KC \tag{4d}$$

$$E_\infty = E_{1\infty} + E_{2\infty}KC; \quad R_\infty = E_\infty^T E_\infty = R_{1\infty} + C^T K^T R_{2\infty} KC \tag{4e}$$

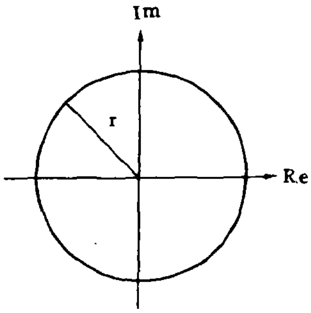

图 1

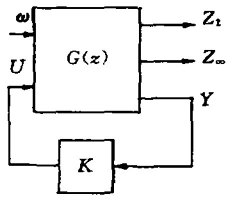

图 2

则其闭环传递函数 $G_c(z)$ 及相应的 $\omega \to Z_2$ 和 $\omega \to Z_\infty$ 的传递函数具有状态空间实现:

$$G_c(z) = \left[\begin{array}{c:c} A_c & D \\ \hdashline C & 0 \\ E_2 & 0 \\ E_\infty & 0 \end{array}\right] \tag{5a}$$

$$G_2(z) = \left[\begin{array}{c:c} A_c & D \\ \hdashline E_2 & 0 \end{array}\right] \quad G_\infty(z) = \left[\begin{array}{c:c} A_c & D \\ \hdashline E_\infty & 0 \end{array}\right] \tag{5b}$$

设 r^* 表示由 H_∞ 最优设计得到的 $\|G(z)\|_\infty$, $r \geqslant r^*$,本文所要解决的问题为:

问题 1 对于系统(1),求控制器增益阵 K 满足

$$\Lambda(A_c) \in C(r) \tag{6a}$$

$$\text{s.t.} \quad \|G_\infty(z)\|_\infty \leqslant r \tag{6b}$$

$$\|G_2(z)\|_2 \to \min \tag{6c}$$

等价地上述问题也可以描述成:

问题 2 对于系统(1),求控制器增益阵 K 满足

$$\min \ \|G_2(z)\|_2 \tag{7a}$$

$$\text{s.t.} \quad \|G_\infty(z)\|_\infty \leqslant r \tag{7b}$$

$$\Lambda(A_c) \in C(r) \tag{7c}$$

[注 2.1]:式(7a)-(7c)将原来具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的离散系统的极点配置问题,转化为一个具有 H_∞ 性能和系统闭环极点位置约束的系统 H_2 性能优化问题,这样就简化了原问题的求解.

3 辅助最小问题

对于前文提出的问题,为能得到它的解,本节将引入辅助最小的概念.为此先介绍几个有关结论.不失一般性,令(5b)中的 $r=1$.

引理 3.1 如果 $\lambda \in C(r)$,则有 $\lambda\bar{\lambda} < r^2$ (8)

引理 3.2 $Q_0 = Q_0^T \geqslant 0$ 是方程 $Q_0 = A_c Q_0 A_c^T + V$ 的解的充要条件为:A_c 渐近稳定,且 (A_c, D) 可镇定.且假设上述条件满足,则

$$J = \|G_2(z)\|_2^2 = \mathrm{tr}(Q_0 R_2) \tag{9}$$

引理 3.3 A_c 渐近稳定,且存在 $Q_0 = Q_0^T \geqslant 0$ 及 $Q_1 = Q_1^T \geqslant 0$ 分别为下列方程的解:

$$Q_0 = A_c Q_0 A_c^T + V \tag{10a}$$

$$Q_1 \geqslant A_c Q_1 A_c^T + V \tag{10b}$$

则
$$Q_1 \geqslant Q_0$$

定理 3.1 对于系统(1),假设(A_c,D)可镇定,且存在$Q\geqslant 0$满足:

$$Q \geqslant A_c Q A_c^T + Q R_\infty Q + V \tag{11a}$$

则闭环系统满足:
$$\| G(s) \|_\infty \leqslant 1 \tag{11b}$$

证明 首先将(11a)改写成:

$$V \leqslant Q - A_c Q A_c^T - Q R_\infty Q \tag{12a}$$

令 $L = E_\infty (e^{j\theta} I - A_c)^{-1}$,则

$$LVL^* = E_\infty (e^{j\theta} I - A_c)^{-1} D D^T (e^{-j\theta} I - A_c)^{-T} E_\infty^T = G_\infty(e^{j\theta}) G_\infty^*(e^{j\theta}) \tag{12b}$$

$$\begin{aligned} Q - A_c Q A_c^T - Q R_\infty Q &= 2 * Q - A_c Q e^{-j\theta} - e^{j\theta} Q A_c^T \\ &\quad - Q E_\infty^T E_\infty Q - (e^{j\theta} I - A_c) Q (e^{-j\theta} I - A_c)^{-T} \\ &= e^{-j\theta}(e^{j\theta} I - A_c) Q + e^{j\theta} Q (e^{-j\theta} I - A_c)^T \\ &\quad - Q E_\infty^T E_\infty Q - (e^{j\theta} I - A_c) Q (e^{-j\theta} I - A_c)^T \end{aligned} \tag{12c}$$

$$\begin{aligned} L(Q - A_c Q A_c^T - Q R_\infty Q) L^* &= e^{-j\theta} E_\infty Q (e^{-j\theta} - A_c)^{-T} E_\infty^T \\ &\quad + e^{j\theta} E_\infty (e^{j\theta} - A_c)^{-1} Q E_\infty^T - E_\infty Q E_\infty^T \\ &\quad - E_\infty (e^{j\theta} I - A_c)^{-1} Q E_\infty^T E_\infty Q (e^{-j\theta} - A_c)^{-T} E_\infty^T \end{aligned} \tag{12d}$$

令 $S = e^{j\theta} E_\infty (e^{j\theta} I - A_c)^{-1} Q E_\infty^T$,则式(12d)等于

$$S + S^* - S * S^* - E_\infty Q E_\infty^T = I - (S - I)(S - I)^* - E_\infty Q E_\infty^T \leqslant I \tag{12e}$$

由(12b)和(12e)得 $G_\infty(e^{j\theta}) G_\infty^*(e^{j\theta}) \leqslant I$. 即 $\| G_\infty(z) \|_\infty \leqslant 1$. 定理证毕.

定理 3.2 对于系统(1),假设(A_c,D)为$C(r)$可配置的,且存在$Q\geqslant 0$满足:

$$A_c Q A_c^T - r^2 Q + V \leqslant 0 \tag{13a}$$

则有
$$\Lambda(A_c) \in C \tag{13b}$$

证明 假设存在$\lambda \in \Lambda(A_c)$满足$\lambda \notin C(r)$,也即$\lambda\bar{\lambda} \geqslant r^2$. 且设$\Pi(Q) \geqslant 0$为矩阵算子满足

$$A_c Q_{A_c}^T - r^2 Q + V + \Pi(Q) = 0 \tag{14a}$$

由于$\bar{\lambda} \in \Lambda(A_c^T)$,设$\eta$为对应于$\bar{\lambda}$的$A_c^T$的特征向量,即$A_c^T \eta = \bar{\lambda}\eta$. 用$\eta^*$和$\eta$分别乘(14a)可得

$$\eta^*(14a)\eta = (\lambda\bar{\lambda} - r^2)\eta^* Q \eta + \eta^*(V + \Pi(Q))\eta = 0 \tag{14b}$$

令$\Xi = V + \Pi(Q)$,因为Q, V, $\Pi(Q)$都非负定,所以(14b)成立意味着$\eta^* \Xi \eta = 0$,也即

$$\eta^* \Xi^{1/2} = 0$$

又因为$A_c^T \eta = \bar{\lambda}\eta$,所以

$$\eta^* [A_c - \lambda I_n, \Xi^{1/2}] = 0$$

这意味着
$$\mathrm{rank}[A_c - \lambda I_n, \Xi^{1/2}] < n \tag{14c}$$

也即λ不是$\Xi^{1/2}$可控的. 而$\lambda \notin C(r)$,所以$(A, \Xi^{1/2})$不是$C(r)$可配置的.

由定理的条件可知(A_c, D)是$C(r)$可配置的,因而$[A_c, \Xi^{1/2}]$也是$C(r)$可配置的,这与上面推得的相矛盾,因而假设不成立,故$\lambda \in C(r)$. 定理证毕.

定理 3.3 (辅助最小问题):对于系统(1),假设(A_c,D)可镇定,且存在$Q\geqslant 0$

满足
$$A_c Q A_c^T - r^2 Q + Q R_\infty Q + V = 0 \tag{15a}$$

则有 (1)
$$\Lambda(A_c) \in C(r) \tag{15b}$$

(2) $$\|G_\infty(z)\|_\infty < 1 \tag{15c}$$

(3) 存在 $Q_0 \leqslant 0$ 满足(10a)，且

(a) $$Q_0 \leqslant Q \tag{15d}$$

(b) $$J^* = \mathrm{tr}(Q_0R_2) \leqslant J = \mathrm{t_r}(QR_2) \tag{15e}$$

证明 由于 $Q\geqslant 0$，所以 $QR_\infty Q\geqslant 0$，根据定理 3.2 可直接证得(15b)成立. 将(15a)重新组合可以得到

$$Q = A_cQA_c^{\mathrm{T}} + QR_\infty Q + V + (1 - r^2)Q$$

由于 $r^2\leqslant 1$，$(1-r^2)Q\geqslant 0$，由引理 3.1 可知(15a)成立意味着(15c)成立.

又因为(15b)成立意味着 A_c 渐近稳定，所以存在 $Q_0\geqslant 0$ 满足(10a)，这样根据引理 3.3 可以很容易证得(15d)成立.

而(15e)是(15d)的直接结果. 定理证毕.

[注 3.1] 定理 3.3 中(15e)表明：$J=\mathrm{tr}(QR_2)$ 是闭环系统 $\|G_2(z)\|_2^2$ 的一个上界，因此最小化 J 从某种意义上来讲也就优化了系统 H_2 性能. 这样，优化系统 H_2 性能通过最小化 J 实现.

[注 3.2] 定理 3.1 将系统(1)具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的系统区域极点配置问题转化成一个有一个矩阵方程约束的辅助性能函数的最小化问题，即：

问题 3 对于系统(1)，求控制器增益阵 K 满足：

$$\min \quad J = \mathrm{tr}(QR_2) \tag{16a}$$

$$\text{s.t.} \quad Q = Q^T \geqslant 0((15a) \text{ 的解}) \tag{16b}$$

4 具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的系统极点配置控制器的实现

定理 4.1 对于系统(1)，假设 (A_c, D) 可镇定，且存在 $Q\geqslant 0$ 满足(15a)以及 $P\geqslant 0$ 满足：

$$A_c^{\mathrm{T}}PA_c - r^2P + PQR_\infty + R_\infty QP + R_2 = 0 \tag{17a}$$

令
$$P_e = B^{\mathrm{T}}PAQC^{\mathrm{T}} \tag{17b}$$

$$R_e = CQC^{\mathrm{T}} \otimes (R_{22} + B^{\mathrm{T}}PB) + CQPQC^{\mathrm{T}} \otimes R_{2\infty} \tag{17c}$$

假设 R_e^{-1} 存在，则

$$K = -\mathrm{vec}^{-1}[R_e^{-1}\mathrm{vec}(P_e)] \tag{17d}$$

为问题 2 的解.

证明 对于问题 3 的求解，可以采用 Lagrange 乘子法得：

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{tr}[QR_2 + P(A_{ce}Q + QA_{ce}^{\mathrm{T}} + 1/rA_{ce}QA_{ce}^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}QR_\infty Q + V)] \\ &= \mathrm{tr}\{Q(R_{12} + C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}R_{22}KC) + P[(A_e + BKC)Q + Q(A_e + BKC)^{\mathrm{T}} \\ &\quad + 1/r(A_e + BKC)Q(A_e + BKC)\mathrm{T} + \gamma^{-2}Q(R_{1\infty} + C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}R_{2\infty}KC)Q + V]\} \end{aligned}$$

因为 $$\frac{\delta J}{\delta K} = 2(R_{22}KCQC^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}PAQC^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}PBKCQC^{\mathrm{T}} + R_{2\infty}KCQPQC^{\mathrm{T}}) = 0$$

所以 $$(R_{22} + B^{\mathrm{T}}PB)KCQC^{\mathrm{T}} + R_{2\infty}KCQPQC^{\mathrm{T}} = -B^{\mathrm{T}}PAQC^{\mathrm{T}} = -P_e$$

$$[CQC^{\mathrm{T}} \otimes (R_{22} + B^{\mathrm{T}}PB) + CQPQC^{\mathrm{T}} \otimes R_{2\infty}]\mathrm{vec}(k) = R_e\mathrm{vec}(k) = -\mathrm{vec}(P_e)$$

由于 R_e 可逆，因此 K 满足(17d).

如果令 $\frac{\delta J}{\delta Q}=0$，则稍加整理就可得出(17a). 定理证毕.

定理 4.1 给出了满足问题 3 的一个输出反馈控制器增益阵的解析表达式，但当系统的状态完全可以得到时，采用状态反馈控制设计往往优于输出反馈控制，下面直接给出满足问题 2 的状态反馈解.

定理 4.2 对于系统(1)，假设(A_c, D)可镇定，$C=I_n$，且存在 $Q\geqslant 0$ 和 $P\geqslant 0$ 分别满足(15a)和(17a)，令

$$P_s = B^{\mathrm{T}}PA \tag{18a}$$

$$R_s = I_n \otimes (R_{22} + B^{\mathrm{T}}PB) + QP \otimes R_{2\infty} \tag{18b}$$

假设 R_s^{-1} 存在，则

$$K = -\mathrm{vec}^{-1}[R_s^{-1}\mathrm{vec}(P_s)] \tag{18c}$$

为问题 3 的一个状态反馈解.

5 讨论

本文主要研究了离散系统具有 H_2/H_∞ 混合性能约束的系统极点配置问题，对于离散线性定常系统，本文给出了静态输出反馈和静态状态反馈控制器的解. 与连续系统类似问题相比较，由于离散系统的 Riccati 方程求解的复杂性，控制器增益阵 K 不能独立解出，必须通过三个矩阵方程联立求解，这样大大增加了求解的复杂性，同时也必须要考虑算法的收敛性问题.

必须同时指出的是本文虽然只研究了系统的静态反馈设计问题，但是本文所提出的方法同样可应用于系统的动态反馈设计，并且可得到类似结果.

参 考 文 献

1 Kim S B, Furuta K. Regulator Design with Poles in a Specified Region. Int J Contr, 1988; 47:143－160

2 Berstein D S, Haddad W M. Controller Design with Regional Pole Constraints. IEEE Trans, Auto Contr, 1992; AC－37; 54－69

3 袁立嵩，蒋慰孙. 鲁棒控制的一个新方向——H_2/H_∞混合控制. 工业过程模型化与控制，1993;5

POLES ASSIGNMENT CONSTRAINED BY MIXED H_2/H_∞ PERFORMANCE FOR DISCRETE SYSTEMS

YUAN Lisong JIANG Weisun

(Res Inst of Auto Contr, East China Univ of Sci and Tech, Shanghai)

Abstract

This paper studies the problem of poles assignment constrained by mixed H_2/H_∞ performances for discrete systems. First, this problem is converted into the problem of H_2 optimization constrained by H_∞ performance and poles' location. Then an auxiliary performance function is introduced to replace the former problem by the problem of minimization of the auxiliary performance. At last this problem is solved by Lagrange multipliers, and the static output feedback and state feedback controllers are designed.

Key words: discrete system feedback control poles assignment mixed H_2/H_∞ control

(袁立嵩，男，26 岁，博士研究生. 主要研究领域为：复杂工业过程模型化与控制，鲁棒控制，智能控制等.)