DOI:10.13976/j.cnki.xk.1998.01.010
第27卷第1期　　信息与控制　　Vol.27,No.1
1998年2月　　Information and Control　　Feb.,1998

大规模含整变量多目标优化的一种新方法†

吴清烈　江孝感　徐南荣
(东南大学经济管理学院　南京　210096)

摘　要　将基于目标希望水平的含整变量多目标交互式优化方法用于研究大规模含整量多目标优化问题.针对具有块角约束结构的大规模含整变量优化问题,运用拉格朗日分解技巧,提出了一种比较实用的大规模含整变量多目标交互式分解协调优化方法.[20]

关键词　大规模问题,多目标优化,整数规划,分解协调,交互式方法

1　引言

大规模多目标优化问题有着广泛的实际背景.像资源分配、大型企业的生产计划等一些实际问题通常不仅是多目标的,而且包含上百个决策变量.目前已有不少国内外学者研究过大规模多目标优化问题[1,2],但至今人们的研究大多局限于变量连续的大规模多目标问题.显然,对实际存在的含整变量的大规模多目标优化问题的研究是大规模多目标优化问题研究的进一步深入和发展,它具有十分重要的意义.

本文将我们在文[3]中提出的基于目标希望水平的多目标交互式优化方法用于研究大规模含整变量多目标优化问题.针对具有块角约束结构的大规模含整量优化问题,运用拉格朗日分解技巧,提出了一种比较实用的大规模含整变量多目标交互式分解交互式分解协调优化方法.

2　问题描述

考虑如下形式的大规模含整变量多目标优化问题:

$$
(\mathrm{LSMOIP})\quad
\begin{aligned}
&\max f_1(x) \triangleq f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2)+\cdots+f_{1p}(x_p)\\
&\max f_2(x) \triangleq f_{21}(x_1)+f_{22}(x_2)+\cdots+f_{2p}(x_p)\\
&\qquad\vdots\\
&\max f_n(x) \triangleq f_{n1}(x_1)+f_{n2}(x_2)+\cdots+f_{np}(x_p) && (1a)\\
&\text{s.t.}\ g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_p(x_p)\geqslant b && (1b)\\
&\qquad h_1(x_1)\geqslant 0\\
&\qquad\ddots && (1c)\\
&\qquad h_p(x_p)\geqslant 0\\
&x_i\in X_i=\{x_i\,|\,x_i\ \text{全部或部分分量取整数值}\} && (1d)\\
&\qquad i=1,2,\cdots,p
\end{aligned}
$$

这里假定所有函数为凹函数.其中 $x_i(i=1,2,\cdots,p)$ 称为决策变量,是含有整型分量的向

[20]　1996－11－22收稿
†国家自然科学基金资助项目

量; $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 称为问题(LSMOIP)的目标函数,具有 p 个函数的加和形式; $G=\{x \mid \sum_{i=1}^{p} g_i(x_i) \geqslant b, h_i(x_i) \geqslant 0, x_i \in X_i, i=1,2,\cdots,p\}$ 称为问题(LSMOIP)的可行集;约束(1b)称为关联约束;约束(1c)、(1d)称为子约束.问题(LSMOIP)包含 p 个相关联的子问题,每个子问题是较小规模的多目标决策问题.

3 辅助问题及若干定理

按照文[3]中基于目标希望水平描述求解多目标优化问题的思路,我们首先根据问题(LSMOIP)构造产生多目标优化问题非劣解的两个单目标辅助问题

$$(AP_1)\quad \begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^{n} u_j && (2a)\\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{p} f(x_i) - u_j H_j \geqslant \bar{f}_j,\quad j=1,2,\cdots,n && (2b)\\ &\sum_{i=1}^{p} g_i(x_i) \geqslant b && (2c)\\ &h_i(x_i) \geqslant 0 && (2d)\\ &x_i \in X_i,\quad i=1,2,\cdots,p && (2e) \end{aligned}$$

$$(AP_2)\quad \begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^{n} u_j && (3a)\\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{p} f(x_i) - u_j H_j \geqslant \bar{f}_j,\quad j=1,2,\cdots,n && (3b)\\ &u_j \geqslant 0, j \in J && (3c)\\ &\sum_{i=1}^{p} g_i(x_i) \geqslant b && (3d)\\ &h_i(x_i) \geqslant 0 && (3e)\\ &x_i \in X_i,\quad i=1,2,\cdots,p && (3f) \end{aligned}$$

在问题(AP_1)及(AP_2)中, $\bar{f}_j$ 是决策人确定的第 j 个目标的希望水平; $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 为辅助变量; H_j 为加权因子,由决策人根据第 j 个目标的理想希望水平 G_j 与可接受的最低水平 C_j 确定;集合 $J \triangleq \{j \mid$ 目标 $f_j(x)$ 的希望水平不能再作调整, $j \in \{1,2,\cdots,n\}\}$.

定义 1 对问题(LSMOIP),若决策人希望决策目标 $f_j(x)$ 满足 $f_j(x) \geqslant \bar{f}_j$,则称 $\bar{f}_j$ 为决策目标 $f_j(x)$ 的希望水平,称 $\bar{f}=(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\cdots,\bar{f}_n)$ 为问题(LSMOIP)的目标希望水平.

定义 2 设 $\bar{x}$ 是问题(LSMOIP)的非劣解,称 $\Delta f_j=\bar{f}_j - f_j(\bar{x})$ 为目标 $f_j(x)$ 的当前水平与希望水平间的偏差.

定义 3 设 x^* 是问题(LSMOIP)的非劣解,若存在一可接受的希望水平 $\bar{f}$,并且有 $f_j(x^*) \geqslant \bar{f}_j(j=1,2,\cdots,n)$,则称 x^* 为问题(LSMOIP)关于目标希望水平 $\bar{f}$ 的满意解.

定义 4 $H_j=G_j-C_j, j=1,2,\cdots,n$.

定理 1 设 $(\bar{x},\bar{u})$ 是问题(AP_1)的最优解,则 $\bar{x}$ 也是问题(LSMOIP)的非劣解.

定理 2 若问题(AP_1)无解,则问题(LSMOIP)无非劣解.

定理 3 若 $(\bar{x},\bar{u})$ 是问题(AP_1)的最优解,则有

$$\Delta f_j = H_j \bar{u}_j,\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

定理 4　若$(\bar{x}, \bar{u})$是问题(AP_2)的最优解，则$\bar{x}$也是问题(LSMOIP)的非劣解.

定理 5　给定目标希望水平$\bar{f}$，如果问题(AP_2)无解，问题(LOMOIP)不存在满意解.

上述定理的证明参见文[3]. 显然，只要能求解问题(AP_1)及(AP_2)，就可以求解多目标问题(LSMOIP)，辅助问题(AP_1)及(AP_2)的求解是多目标决策的关键所在. 由于问题(AP_1)是问题(AP_2)在$J = \Phi$时的特例，下面我们只讨论问题(AP_2)的求解.

4　分解协调方法

对问题(AP_2)的求解，我们采用基于拉格朗日分解对偶的分解协调方法. 在问题(AP_2)中，假定x_i的维数n_i与b的维数m有关系：$\sum_{i=1}^{p} n_i \gg m$，为便于对问题(AP_2)运用拉格朗日分解，引入n维变量$f^i = (f_{1i}, f_{2i}, \cdots, f_{ni})^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$及m维变量g_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$，并将问题(AP_2)改写成下面的形式：

$$(\overline{AP})\quad \begin{aligned}
& z = \max \sum_{j=1}^{n} u_j && (5a)\\
& \text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{p} f_{ji} - u_j H_j \geqslant \bar{f}_j,\ j = 1, 2, \cdots, n && (5b)\\
& u_j \geqslant 0,\ j \in J && (5c)\\
& \sum_{i=1}^{p} g_i \geqslant b && (5d)\\
& f_{ji}(x_i) = f_{ji} && (5e)\\
& g_i(x_i) = g_i && (5f)\\
& h_i(x_i) \geqslant 0 && (5g)\\
& x_i \in X_i && (5h)\\
& f_{ji}^{L} \leqslant f_{ji} \leqslant f_{ji}^{U} && (5i)\\
& g_i^{L} \leqslant g_i \leqslant g_i^{U},\quad i = 1, 2, \cdots, p && (5j)
\end{aligned}$$

对问题$(\overline{AP})$引入乘子变量$\alpha_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni})$及$\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{im})$并松驰"拷贝"约束(5e)、(5f)得相应的拉格朗日松驰问题

$$(LR)\quad \begin{aligned}
z(\alpha, \beta) &= \max \sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(f_{ji}(x_i) - f_{ji}) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i (g_i(x_i) - g_i)\\
&\quad \text{s.t.}\ (5b) \sim (5d),\quad (5g) \sim (5j)\\
&= \sum_{i=1}^{p} \left\{ \begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} f_{ji}(x_i) + \beta_i g_i(x_i)\\ & \text{s.t.}\ h_i(x_i) \geqslant 0\\ & x_i \in X_i \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\max \sum_{j=1}^{n} u_j-\sum_{i=1}^{p}\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} f_{ji}+\beta_i g_i\} \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^{p} f_{ji}-u_j H_j \geqslant \bar{f}_j, j=1,2,\cdots,n \\ u_j \geqslant 0, j \in J \\ \sum_{i=1}^{p} g_i \geqslant b \\ f_{ji}^L \leqslant f_{ji} \leqslant f_{ji}^U, j=1,2,\cdots,n \\ g_i^L \leqslant g_i \leqslant g_i^U, \quad i=1,2,\cdots,p\end{array}\right. \tag{6}$$

显然,问题(LR)可以分解成如下$(p+1)$个子问题

$$z_i(\alpha_i,\beta_i)=\max \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} f_{ji}(x_i)+\beta_i g_i(x_i) \tag{7a}$$

$(SP_i(\alpha_i,\beta_i))$

$$\text{s.t.}\ h_i(x_i) \geqslant 0 \tag{7b}$$

$$x_i \in X_i, \quad i=1,2,\cdots,p \tag{7c}$$

$$z_o(\alpha,\beta)=\max \sum_{j=1}^{n} u_j-\sum_{i=1}^{p}\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} f_{ji}+\beta_i g_i\} \tag{8a}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{p} f_{ji}-u_j H_j \geqslant \bar{f}_j, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{8b}$$

$$u_j \geqslant 0, j \in J \tag{8c}$$

$(SP_o(\alpha,\beta))$

$$\sum_{i=1}^{p} g_i \geqslant b \tag{8d}$$

$$f_{ji}^L \leqslant f_{ji} \leqslant f_{ji}^U, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{8e}$$

$$g_i^L \leqslant g_i \leqslant g_i^U, \quad i=1,2,\cdots p \tag{8f}$$

从而有

(LD)

$$z(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{p} z_i(\alpha_i,\beta_i)+z_o(\alpha,\beta) \tag{9}$$

容易证明$z(\alpha,\beta)$是关于α,β的凸函数,并且有

(LDD)

$$z(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\min_{\alpha,\beta}(\sum_{i=1}^{p} z_i(\alpha_i,\beta_i)+z_o(\alpha,\beta))= \sum_{i=1}^{p} z_i(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i)+z_o(\bar{\alpha},\bar{\beta}) \tag{10}$$

假定

$$z_i(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{ji} f_{ji}(x_i^*)+\bar{\beta}_i g_i(x_i^*), \quad i=1,2,\cdots,p \tag{11}$$

$$z_o(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\sum_{j=1}^{n} u_j^*-\sum_{i=1}^{p}\{\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{ji} f_{ji}^*+\bar{\beta}_i g_i^*\} \tag{12}$$

则有

$$z(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\sum_{i=1}^{p}\{\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{ji}(f_{ji}(x_i^*)-f_{ji}^*)+\bar{\beta}_i(g_i(x^*)-g_i^*)\}+\sum_{j=1}^{n} u_j^* \tag{13}$$

令

(LDDi)

$$z^i(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i)=\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{ji}(f_{ji}(x_i^*)-f_{ji}^*)+\bar{\beta}_i(g_i(x^*)-g_i^*) \tag{14}$$

则有

$$z(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{p}z^{i}(\alpha_i,\beta_i)+\sum_{j=1}^{n}u_j^{*} \tag{15}$$

问题(LDD)称为问题(AP_2)的拉格朗日分解对偶问题,也可分解为 p 个子问题(LDD_i).

问题(LDD)的求解采用分解协调方法.第一级包括($p+1$)个子问题($SP_i(\alpha_i,\beta_i)$)($i=1,2,\cdots,p$)及($SP_o(\alpha,\beta)$).前者是整数规划问题,可找到合适的方法求解;第二级通过协调确定乘子 α,β 提供给第一级.由于决策变量 x 存在整型分量,$z(\alpha,\beta)$ 是关于 α,β 存在不可微点的凸函数,因此乘子 α,β 的优化一般采用次梯度法[4].

很显然,对问题($\overline{AP}$)及(LDD)有 $z\leqslant z(\alpha,\beta)$.如取等号,即得问题($AP_2$)的解;否则,存在对偶间隙.这时,问题(LDD)为问题($\overline{AP}$)提供了一相当好的上界,记为 $UB=z(\alpha,\beta)$.在存在对偶间隙的情况下,我们应设法弥合存在的间隙,以便得到问题(AP_2)的最优解.

弥合对偶间隙的一种比较有效的方法是在上述 p 个子问题的近优解中搜索问题(AP_2)的最好可行解[5].我们考虑 p 个子问题:

$$(SP_i(\alpha_i,\beta_i))\qquad \begin{aligned} z^{i}(\alpha,\beta) &= max \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}f_{ji}(x_i)+\beta_i g_i(x_i) && (16a)\\ \text{s.t. }\ & h_i(x_i)\geqslant 0 && (16b)\\ & x_i\in X_i && (16c)\end{aligned}$$

我们假定 x_i^1 为问题($SP_i(\alpha_i,\beta_i)$)的最优解 $x_i^t(t=2,3,\cdots,k_i)$ 为问题($SP_i(\alpha_i,\beta_i)$)的有序近优解,同时令

$$\Psi_i(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}f_{ji}(x_i)+\beta_i g_i(x_i) \tag{17}$$

并假定

$$\Psi_i(x_i^1)\geqslant\Psi_i(x_i^2)\geqslant\cdots\geqslant\Psi_i(x_i^{ki}) \tag{18}$$

显然有

$$UB=\sum_{i=1}^{P}\Psi_i(x_i^1)+z_o(\alpha,\beta) \tag{19}$$

我们再构造下面的辅助问题,相对于子问题($SP_i(\alpha_i,\beta_i)$),称其为主问题

$$(MP)\qquad \begin{aligned} z &= \max\sum_{j=1}^{n}u_j && (20a)\\ \text{s.t. }\ & \sum_{i=1}^{p}\sum_{t=1}^{k_i}f_{ji}(x_i^t)\lambda_{it}-u_jH_j\geqslant\bar{f}_j,\quad j=1,2,\cdots,n && (20b)\\ & \sum_{i=1}^{p}\sum_{t=1}^{k_i}g_i(x_i^t)\lambda_{it}\geqslant b && (20c)\\ & \sum_{t=1}^{k_i}\lambda_{it}=1,\quad i=1,2,\cdots,P && (20d)\\ & \lambda_{it}=0\text{ 或 }1,\quad t=1,2,\cdots,k_i,\quad i=1,2,\cdots,p && (20e)\end{aligned}$$

只要 k_i 足够大,即子问题($SP_i(\alpha_i,\beta_i)$)提供一定数量近优解,问题(MP)总是有解的.问题(MP)是 0-1 规划,并且有特殊结构,UB 也是它的上界,因此容易找到合适的求解方法.

假定 λ^* 为问题(MP)的最优解,则问题(AP_2)有相应的可行解 $x_i(\lambda^*)$.从而可以确定问题

(AP_2) 的当前下界为

$$LB = z = \sum_{j=1}^{n} u_j(\lambda^*) \tag{21}$$

再令

$$\Delta = UB - LB \tag{22}$$

$$\eta_i = \psi_i(x_i^1) - \psi_i(x_i^{k_i}), \quad i = 1, 2, \cdots, p \tag{23}$$

$$\mu_i = \psi_i(x_i^1) - \Delta, \quad i = 1, 2, \cdots, p \tag{24}$$

从而有如下定理

定理 6 如果 $\eta_i \geqslant \Delta(i = 1, 2, \cdots, p)$，则有

$$LB = z \tag{25}$$

定理 7 对子问题$(SP_i(\alpha_i, \beta_i))$，所有满足 $\psi_i(x_i) < \mu_i$ 的解不可能成为问题(AP_2)是最优解分量.

定理 6 及定理 7 易用反证法证明，参见文[6]. 定理 6 给出了通过问题(MP)求解(AP_2)的最优性条件. 如果满足 $\eta_i \geqslant \Delta(i = 1, 2, \cdots, p)$，那么由问题(MP)求得的 $x_i(\lambda^*)$、$u_j(\lambda^*)$ 即为问题(MP)的最优解，LB 为其最优值. 定理 7 中的 μ_i 称为阀值或过滤条件. 子问题$(SP_i(\alpha_i, \beta_i))(i = 1, 2, \cdots, p)$中，只有满足 $\psi_i(x_i) \geqslant \mu_i$ 的近优解，才可能成为问题(AP_2)的最优解分量，因而才有必要包括在问题(MP)中. 限于篇幅，这里不再讨论求解问题(AP_2)(近似)最优解的完整算法.

5 交互式优化方法

基于上述讨论，对于问题(LSMOIP)，可给出如下交互式优化方法：

第 1 步 计算或由决策人确定 G_j 与 $C_j(j = 1, 2, \cdots, n)$，计算 H_j，再由决策人给定各目标初始希望水平 $\bar{f}_o$；

第 2 步 构造并求解辅助问题(AP_1)，若问题(AP_1)有解 $\bar{x}$，转下一步；否则，问题(LSMOIP)无非劣解，结束；

第 3 步 若决策人对 $\bar{x}$ 满意，则 $\bar{x}$ 为所要求的满意解，结束；否则，转下一步；

第 4 步 调整目标希望水平：①在未达到希望水平的目标即与 $\bar{u}_j > 0$ 相对应的目标中确定适当降低哪些目标的希望水平及其可接受的修正量；②确定记录哪些目标的希望水平已是允许最低水平即不能再降低，若所有希望水平均高于各自允许的最低水平，转第 2 步；否则，转下一步；

第 5 步 记 $J \triangleq \{j \mid$目标$f_j(x)$的希望水平不能再降低,$j \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$，构造并求解辅助问题$(AP_2)$，若问题$(AP_2)$有解，转下一步，否则问题(LSMOIP)无满意解，结束；

第 6 步 若决策人对 $\bar{x}$ 满意，则 $\bar{x}$ 为所要求的满意解，结束.

6 软件实现

下面对大规模含整变量多目标优化交互式分解协调方法的的计算机软件实现作一说明. 运用本文所提出的多目标优化方法，解决实际的大规模含整变量多目标优化问题在编制相应的计算机软件时，作了以下几个方面的考虑：(1)由于优化方法是交互式的，因而必须要求计算机给决策人提供良好的交互界面；(2)由于解决的问题是大规模的、多目标的，变量多、数据多，必须建立相应的数据库系统；(3)由于问题求解的复杂性，为便于软件编制，软件应按模块进行

编制.

根据上述的讨论,我们按模块编制优化软件.执行软件包括:(1)主程序模块;(2)多目标优化交互模块;(3)辅助问题求解模块.辅助问题求解模块又包括:(1)拉格朗日分解对偶问题求解子模块;(2)子问题求解子模块;(3)子问题有序近优解生成子模块;(4)对偶间隙弥合子模块.数据库包括:(1)多目标优化问题描述数据库;(2)辅助问题输入输出数据库;(3)辅助问题子问题有序最优解数据库.

7 结束语

大规模含整变量多目标优化问题,人们研究得甚少.由于这类问题含有整型决策变量,给问题的求解带来了困难.本文提出的大规模含整变量多目标优化方法,把基于目标希望水平水平的多目标决策方法与求解大规模含整量优化问题的拉格朗日分解方法结合起来,有效实用.本文工作无论是对理论研究还是对实际应用都具有意义的.

参 考 文 献

1 杨剑波,华兆麟,张钟俊.大规模多目标优化的交互式目标协调法(ISTNM),控制与决策,1988,**3**(2):11～18

2 Tarvainen K, Haimes Y Y. Coordination of Hierachical Multiobjective Systems: Theory and Methodology. IEEE Trans SMC, 1982, **12**(6), 751～764

3 吴清烈,徐南荣.基于目标希望水平的多目标决策新方法,系统工程学报,1996,**11**(2):7～14

4 Fisher M L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. Mgmt Sci., 1981, **27**(1): 1～8

5 Sweeney D J, Murphy R A. A Method of Decomposition for Integer Programs. Op Res., 1979, **27**:1128～1141

6 吴清烈,徐南荣.大规模含整变量优化问题的一种分解方法,东南大学学报,1996,**26**(3):120～125

A NEW METHOD FOR LARGE-SCALE MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION WITH INTEGER VARIABLES

WU Qinglie　JIANG Xiaogan　XU Nanrong

(*School of Economics & Management, Southeast University Nanjing* 210096)

Abstract　This paper applies the objective aspiration level based method for multiobjective interactive optimization with integer variables to study the large-scale multiobjective optimization problem with integer variables. An interactive decomposition and coordination method based on the objective aspiration level is proposed for the large-scale multiobjective optimization problem with block angular and integer variables by utilizing the Lagragian decomposition duality technique.

Key words　Large-scale problems, multiobjective optimization, integer programming, decomposition and coordination, interactive method

作者简介

吴清烈,男,31 岁,博士,讲师.研究领域为大系统规划与决策.

江孝感,男,43 岁,副教授.研究领域为运筹学、财政学.

徐南荣,男,58 岁,教授.研究领域为控制理论及应用.