离散系统的环形区域极点配置及约束方差综合控制‡

孙 翔 王子栋 郭 治
(南京理工大学自动控制系 南京 210094)

摘 要 利用广义逆理论和奇异值分解理论, 研究离散型线性随机系统的综合控制设计问题. 旨在设计期望的控制器, 使闭环系统的特征集合定位在单位圆内的一个环形区域之中, 且每一个稳态状态方差都符合即定的约束. 本文提供一种综合设计方法, 使这一类应用广泛的工程控制系统同时具备良好的稳定特性和动态性能. 通过研究一个修正的代数 Lyapunov 矩阵方程, 导出控制器存在的充分条件和解集合的表达式, 并提供了一个算例. 本方法所得的结果具有形式简洁, 易于工程实现, 设计保守性少的特点.*

关键词 环形区域极点配置, 稳态方差约束, 离散系统

1 引言

线性系统的极点配置问题一直受到有关学者们的关注, 出现了许多不同的解决方法, 使闭环系统的极点集合配置到某一特定的区域之中[1~7]. 文献[1][2]通过确定二次型指标中的加权矩阵, 使闭环极点配置到左半复平面上的一个垂直带状区域中; 文献[3][4]利用解 Riccati 方程的方法, 将闭环极点配置到某一圆形区域中; 文献[5]设计线性二次型调节器, 用一个双曲线区域来约束系统的极点分布; 文献[6]的闭环极点区域是一扇区; 文献[7]采用解 Lyapunov 方程的途径, 使闭环极点定位到单位圆内的一个同心圆中. 然而, 文献[5][6][7]所采用的方法, 通常不适合于双时标系统的优化区域极点配置, 这是由于无法保证慢模态子系统的极点约束到快模态子系统所对应的区域中. 在单位圆内的可配置区域, 如同心圆[7]或横轴上的非同心圆[3~4], 由于无法兼顾动态特性及稳定性能[7], 或缺少明确的物理含义[3~4], 均非理想的极点约束区域. 目前, 大多数关于极点配置的文献所研究的对象是线性定常连续系统, 而在线性随机离散系统中, 优化区域极点配置方面的文献实为少见.

近年来, 在随机控制领域中涌现了大量的成果[8~11]. 深入的研究表明, 约束方差控制问题的物理背景其本质是: 在工程实践中, 大量的随机控制系统的性能指标可直接刻划为系统稳态状态方差及其导数的上界形式, 而不是系统的二次型指标. 应运而生的协方差控制理论, 直接面向工程问题的求解, 摆脱了传统的 LQG 方法的间接性和局限性, 即 LQG 方法不能保证各稳态状态方差都满足各自给定的约束, 且 LQG 方法所实现的二次型性能指标与工程系统的实际指标难以融合. 协方差控制理论可使闭环系统的稳态状态方差配置到预给的指定值, 为解决这类工程中应用广泛的问题提供了有效的方法. 这一理论的发展结果之一是方程解的非唯一性, 由此带来的设计自由度为满足其他的指标约束提供了可能性.

本文研究离散型随机系统的环形区域极点配置及约束方差综合控制问题, 目的是使系统实现方差约束和稳定工作的基本特性外, 对外部控制输入信号具有良好的响应特性. 本文将上

* 1995- 08- 08 收稿
‡ 高校博士点专项基金资助项目

述综合指标表征于一个修正的代数 Lyapunov 方程中, 籍此给出状态反馈控制器集合的解析表达式和存在性条件. 与文献[3][4][7]相比, 该设计方法保守性少, 便于工程应用.

2　问题的描述

考虑以下线性定常随机离散系统

$$\left.\begin{aligned} &x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Dw(k)\\ &\mathrm{E}[w(k)]=0\\ &\mathrm{E}[x_0w(k)^{\mathrm{T}}]=0\\ &\mathrm{E}[w(k+j)w(k)^{\mathrm{T}}]=I\delta(j)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $x(k)\in R^{n_x}$, $u(k)\in R^{n_u}$, $w(k)\in R^{n_w}$, A, B, D 为适维定常矩阵, $w(k)$ 是强度为 I 的零均值高斯白噪声序列. 假定 (A, D) 及 (A, B) 分别是可控的与能稳的, 且 $DD^{\mathrm{T}}>0$. 这里 $\mathrm{E}(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的数学期望, $(\cdot)>0$, 表示 $(\cdot)$ 正定.

若状态反馈律为

$$u(k)=Fx(k)\tag{2}$$

则闭环系统成为

$$x(k+1)=A_cx(k)+Dw(k)\tag{3a}$$

$$A_c=A+BF\tag{3b}$$

对于系统(3), 若 F 可稳, 则易于验证由下式定义的闭环系统稳态状态协方差矩阵

$$X\triangleq\lim_{k\to\infty}\mathrm{E}[x(k)x(k)^{\mathrm{T}}]\tag{4}$$

存在且满足以下离散 Lyapunov 方程[8]

$$X=A_cXA_c^{\mathrm{T}}+DD^{\mathrm{T}}\tag{5}$$

本文所考虑的离散型随机系统综合设计问题可表述如下: 对于系统(1), 设计期望的定常反馈控制器, 使闭环系统(3)满足下列性能指标.

(a) 闭环极点的集合定位于单位圆内的环形区域 $\Omega[r_1, r_2]$ 内, 即

$$\Lambda(A_c)\subset\Omega[r_1, r_2]\tag{6}$$

这里的 $\Omega[r_1, r_2]$ $(0<r_1<r_2<1)$ 是圆心在原点处, 半径为 r_1 及 r_2 的圆周所夹的环形区域(见图1), $\Omega[r_1, r_2]$ 是可构造的.

(b) 闭环系统(3)的每个状态分量的稳态方差满足

$$[X]_{ii}<\beta_i^2,\quad i=1,2,\cdots,n_x\tag{7}$$

其中 $[X]_{ii}$ 表示协方差矩阵 X 的第 i 个对角元素, β_i $(i=1, 2, \cdots, n_x)$ 表示系统的实际稳态方差的均方根值约束.

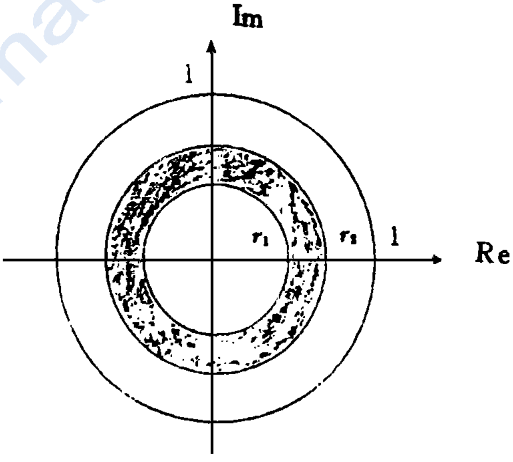

图 1　单位圆内的环形区域

3　综合设计

本节将协方差控制方法作适当拓广, 使之能将闭环极点的分布约束到单位圆内的一个环

形区域之中. 当系统的实际稳态方差的均方根值指标给定后, 可选取合适的对称正定阵 P, 使之满足

$$[P]_{ii} \le \beta_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n_x \tag{8}$$

再结合系统的动态性能要求, 选取相应的适维对称正定阵 Q, 根据方差可配置条件, 如上选取的矩阵 P 及 Q 应满足

$$P > PQP > DD^{\mathrm{T}} > 0 \tag{9}$$

进一步, 利用一个修正的 Lyapunov 方程, 替代 Lyapunov 方程(5), 通过研究这一修正的 Lyapunov 方程, 达到综合设计的目的.

定理 3.1　对于线性随机离散系统(3), 若存在对称正定矩阵 P 满足以下 Lyapunov 方程

$$P = A_c P A_c^{\mathrm{T}} + PQP \tag{10}$$

那么, 下列性能指标将同时达到

(1) $\Lambda(A_c) \subset \Omega[r_1, r_2]$

(2) $[X]_{ii} < \beta_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n_x$

这里的环形区域 $\Omega[r_1, r_2]$ 可表征为

$$\Omega[r_1, r_2] := \{(r_1, r_2) \mid r_1 = (1 - \bar{\sigma}(\Phi))]^{1/2}, r_2 = [1 - \underline{\sigma}(\Phi)]^{1/2}, \quad \Phi = P^{1/2}QP^{1/2}\} \tag{11}$$

其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 和 $\underline{\sigma}(\cdot)$ 分别表示$(\cdot)$的最大、最小特征值. 其中对称正定矩阵 P, Q 满足条件(8), (9).

证明　设存在可稳状态反馈控制器 F 使代数矩阵方程(10) 有对称正定解矩阵 P. 令 λ 是 A_c^{T} 的一个特征值, 相应的右特征向量为 μ, 则

$$A_c^{\mathrm{T}}\mu = \lambda\mu, \quad \bar{\mu}^{\mathrm{T}}A_c = \bar{\lambda}\bar{\mu}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

可推得

$$\bar{\mu}^{\mathrm{T}}P\mu = \bar{\mu}^{\mathrm{T}}A_c P A_c^{\mathrm{T}}\mu + \bar{\mu}^{\mathrm{T}}PQP\mu \tag{13}$$

由于 $\lambda = \varphi + j\psi$, 上式成为

$$\bar{\mu}^{\mathrm{T}}P\mu = r^2\bar{\mu}^{\mathrm{T}}P\mu + \bar{\mu}^{\mathrm{T}}PQP\mu \tag{14}$$

其中 $r^2 = \varphi^2 + \psi^2$, 令 $\pi = P^{1/2}\mu$, 则(14) 式成为

$$\pi^{\mathrm{T}}\pi = r^2\pi^{\mathrm{T}}\pi + \pi^{\mathrm{T}}\Phi\pi \tag{15}$$

其中 $\Phi = P^{1/2}QP^{1/2} > 0$, 上式即

$$1 - r^2 = \frac{\pi^{\mathrm{T}}\Phi\pi}{\pi^{\mathrm{T}}\pi} \tag{16}$$

注意到可选定合适的对称正定矩阵 P 及 Q, 使之满足 $P - PQP \ge 0$, 易验证如下不等式成立

$$0 < [1 - \bar{\sigma}(\Phi)]^{1/2} \le [1 - \underline{\sigma}(\Phi)]^{1/2} < 1 \tag{17}$$

由 Rayleigh 商得

$$\underline{\sigma}(\Phi) \le \frac{\pi^{\mathrm{T}}\Phi\pi}{\pi^{\mathrm{T}}\pi} \le \bar{\sigma}(\Phi) \tag{18}$$

考虑到(16) 及(18) 式, 有

$$[1 - \bar{\sigma}(\Phi)]^{1/2} \le r \le [1 - \underline{\sigma}(\Phi)]^{1/2} \tag{19}$$

故下式成立

$$\Lambda(A_c) \subset \Omega[r_1,\ r_2]$$

将方程(10)式减去方程(5)式, 得

$$P - X = A_c(P - X)A_c^{\mathrm{T}} + PQP - DD^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

由于$DD^{\mathrm{T}} > 0$, 只须选定适当的对称正定矩阵Q, 使$PQP - DD^{\mathrm{T}} > 0$成立, 又因$F$使$A_c$渐近稳定, 根据Lyapunov稳定性理论, 上式可直接推出$P - X > 0$成立, 即$P > X$成立. 对于适当选取的满足(8)式的对称正定矩阵P, 寻找使方程(10)式成立的控制器F的集合, 若这样的F存在且可求, 则

$$[X]_{ii} < [P]_{ii} \le \beta_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n_x \tag{21}$$

成立. 定理证毕.

下面利用奇异值分解理论及广义逆理论, 寻找期望的控制器F存在条件以及解析表达式.

引理 **3.1**[11]　设$M \in R^{m\times p}$且$N \in R^{m\times p}(m \le p)$, 则存在矩阵$V$同时满足

$$N = MV, \quad VV^{\mathrm{T}} = I \tag{22}$$

当且仅当

$$MM^{\mathrm{T}} = NN^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

这里V的通解可表示为

$$V = V_M\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}V_N^{\mathrm{T}}, \quad U \in R^{(n-r_M)\times(p-r_M)}, UU^{\mathrm{T}} = I \tag{24}$$

其中V_M和V_N分别来自于M, N的奇异值分解

$$M = U_M\begin{bmatrix} z_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_M^{\mathrm{T}} = [U_{M1}\ U_{M2}]\begin{bmatrix} Z_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{M1}^{\mathrm{T}} \\ V_{M2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$N = U_N\begin{bmatrix} Z_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V_N^{\mathrm{T}} = [U_{N1}\ U_{N2}]\begin{bmatrix} Z_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{N1}^{\mathrm{T}} \\ V_{N2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

且$r_M = \mathrm{rank}(M)$, $U_M = U_N$, $Z_M = Z_N$.

方程(10)可重写为

$$P - PQP = A_cPA_c^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

由条件(9)式可知(25)式左端半正定, 两端取平方根因子, 有$P - PQP = LL^{\mathrm{T}}$, $P = TT^{\mathrm{T}}$, $L, T \in R^{n_x\times n_x}$, 那么(25)式等价于

$$LL^{\mathrm{T}} = A_cTT^{\mathrm{T}}A_c^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

由引理 3.1 知, 存在正交阵V, 使

$$LV = A_cT \tag{27}$$

或

$$BF = LVT^{-1} - A \tag{28}$$

由文献[12]知, 上式存在控制器F的充分必要条件是

$$(I - BB^{+})(LVT^{-1} - A) = 0 \tag{29}$$

或等价于

$$(I - BB^{+})LV = (I - BB^{+})AT \tag{30}$$

根据引理 3.1, 上式等价于

$$[(I-BB^{+})L][(I-BB^{+})L]^{\mathrm{T}}=[(I-BB^{+})AT][(I-BB^{+})AT]^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

至此不难得到下述结论成立.

定理 3.2 对于离散系统(3),若给定环形区域 $\Omega[r_1, r_2]$ 及稳态状态方差约束 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n_x)$,则系统(3)满足性能指标(a)和(b)的条件为

$$P>PQP>DD^{\mathrm{T}}>0 \tag{32}$$

$$(I-BB^{+})(APA^{\mathrm{T}}+PQP-P)(I-BB^{+})=0 \tag{33}$$

相应的控制器 F 的集合可刻划为

$$F=B^{+}\left[(P-PQP)^{1/2}V_M\begin{bmatrix} I_M & 0 \\ 0 & U\end{bmatrix}V_N^{\mathrm{T}}P^{-1/2}-A\right]+(I-B^{+}B)Z \tag{34}$$

其中 B^{+} 是 B 阵 Moore-Penrose 广义逆,Z 为任意适维矩阵,Q 为满足条件(32)的适维正定矩阵,相应的环形区域 $\Omega[r_1, r_2]$ 如(11)式所示,$I_M\in R^{r_M\times r_M}$,$r_M=\mathrm{rank}(M)$,M, V_M, V_N, U 的定义见证明过程.

证明 注意到(31)式可表示成

$$(I-BB^{+})(LL^{\mathrm{T}}-ATT^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(I-BB^{+})=0 \tag{35}$$

上式与(33)式等价,结合定理 3.1 的结果,即知(32),(33)式表征了本结论的存在条件. 现对(30)式进行奇异值分解,令

$$M\triangleq(I-BB^{+})L=U_M\begin{bmatrix} Z_M & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}V_M^{\mathrm{T}} \tag{36}$$

$$N\triangleq(I-BB^{+})AP^{1/2}=U_N\begin{bmatrix} Z_N & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}V_N^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

由于(26)式成立,根据引理 3.1 满足(30)式的正交矩阵 V 存在并可表达成

$$V=V_M\begin{bmatrix} I_M & 0 \\ 0 & U\end{bmatrix}V_N^{\mathrm{T}},\quad U\in R^{(n_x-r_M)\times(n_x-r_M)} \tag{38}$$

其中 U 是任意正交矩阵. 根据文献[12],若条件(32),(33)式成立,那么,方程(28)中的控制器 F 存在且可刻划成

$$F=B^{+}(LVT^{-1}-A)+(I-B^{+}B)Z \tag{39}$$

将(38)式及 L, T 定义代入上式,即为(34)式. 定理证毕.

定理 3.2 说明,在实际系统的综合设计中,可根据给定的稳态方差约束、动态特性及稳定裕度的要求,结合 $[P]_{ii}\le\beta_i^2(i=1,2,\cdots,n_x)$ 选取合适的正定矩阵 P 的集合,再选取满足(32)的正定矩阵 Q 的集合,进而确定出合适的 (P,Q) 对,构造出期望的 $\Omega[r_1, r_2]$,验证条件(33),若成立,由(34)式直接得出状态反馈控制器 F. 或者,可先将正定矩阵 P 视为待定矩阵,通过(33)式得到 P 阵各元素须满足的关系式. 由于简化后的实际模型其阶数通常并不太高,又 $I-BB^{+}$ 通常是主对角元素为 0 或 1 的对角阵,所以由(33)式得到的关系式亦不复杂,然后经过前述过程选定矩阵 P, Q, 当定理 3.2 的条件成立后,即可求出控制器 F.

4 数值计算

对于随机离散系统(3),各矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 1.2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0.7094 & 0.0001 & 0.0003\\ 0.0001 & 0.7204 & 0.0005\\ 0.0003 & 0.0005 & 0.3214\end{bmatrix}$$

本例中,易见开环系统不稳定.设系统稳态方差约束为$[X]_{11}< 0.935$, $[X]_{22}< 0.904$, $[X]_{33}< 0.788$, 不妨取 $P=\mathrm{diag}(0.9053,\ 0.8294,\ 0.6286)$, 即有 $T=P^{1/2}=\mathrm{diag}(0.9514,\ 0.9107,\ 0.7928)$, 可选取合适的矩阵 Q, 并计算出矩阵 $\Phi=P^{1/2}QP^{1/2}$

$$Q=\begin{bmatrix}0.8285 & -0.0145 & 0.0123\\ -0.0145 & 0.9043 & 0.0005\\ 0.0123 & 0.0005 & 0.8864\end{bmatrix},$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}0.7500 & -0.0126 & 0.0093\\ -0.0126 & 0.75001 & 0.0004\\ 0.0093 & 0.0004 & 0.5572\end{bmatrix}$$

从而得到 $\Omega[r_1,\ r_2]=\Omega[0.48,\ 0.666]$, 易于验证条件(32), (33)成立. 若取阵矩 $Z=0$, 则由(34)式得

$$F=\begin{bmatrix}-0.2391 & -0.1079 & -1.0287\\ 0.0071 & 0.0369 & -0.5359\end{bmatrix}$$

闭环系统的特征值为$(-0.5,\ 0.498,\ 0.657)$, 可见 $\Lambda(A+BF)\subset\Omega[r_1,\ r_2]$成立, 闭环系统的稳态方差$[X]_{11}=0.7026$, $[X]_{22}=0.6378$, $[X]_{33}=0.1868$, 显然满足指标要求.

5　小结

本文研究了离散型随机系统在方差约束下的环形区域极点配置问题. 通过适当地选取矩阵 P 及 Q, 构造出环形区域 $\Omega[r_1,\ r_2]$, 它表征了闭环系统应具有的响应特性及稳定裕度, 是离散系统极点配置的优化区域. 利用代数方法, 给出期望的控制器存在的充要条件, 刻划了控制器解的集合. 在动态输出和静态输出的情况下, 亦有着类似的结论. 进一步必须考虑的问题是系统参数的不确定性、扰动输入抑制等等有关性能的约束.

参　考　文　献

1　Shieh L S, Dib H M, Bayliss C M. Linear Quadratic Regulaters with Eigenvalue Placement in a Vertical Strip. IEEE Trans Automat Control, 1986, **31**(3): 241～243

2　Rousan N S. Constrained Pole Assignment Robustness. ACC/WM 3, 1992: 590～591

3　Furuta K, Kim S B. Pole Assignment in a Specified Disk. IEEE Trans Automat Control, 1987, **32**(5): 423～427

4　Wang Zidong, Chen Xuemin, Guo Zhi. Controller Design for Continuous Systems with Variance and Circular Pole Constraints. Int J Systems Science (to Appear), 1994

5　Kawasaki N, Shimenura E. Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region. Automatica, 1983, **19**(5): 557～560

6　Woodham C A, Zinober A S I. Eigenvalue Placement in a Specified Sector for Variable Structure Control Systems. Int J Contr, 1993, **57**(5): 1021～1037

7　Yaz E, Kaufman B, Nanacara W, Azemi A. Extensions of Estimation and Control by Covariance Assignment, ACC/TA 14, 1992: 1816～1817

8　Hota A F, Skelton R E. A Covariance Control Theory. Int J Contr, 1987, **46**(1): 13～32

9　Hsieh C, Skelton R E. All Covariance Controllers for Linear Discrete-Time Systems. IEEE Trans Automa Control, 1990, **35**(8): 908～915

10 Skelton R E, Iwasaki T. Liapunov and Covariance Controllers. Int J Contr, 1993, **57**(3): 519～536

11 Xu J H, Skelton R E. An Improved Covariance Assignment Theory for Discrete Systems. IEEE Trans Automat, Control, 1992, **37**(10)

12 Ben-Israel A, Grecille T N E. Generalized Inverse: Theory and Application. John Wiley and Sons, Inc, 1974

RING POLE ASSIGNMENT AND VARIANCE-CONSTRAINED SYNTHETICAL CONTROL FOR DISCRETE SYSTEM

SUN Xiang WANG Zidong GUO Zhi

(*The Dept of Auto Contr, Nanjing Univ of Sci & Tech, Nanjing* 210094)

Abstract This paper discusses the synthetical control designing problem for discrete linear stochastic systems with generalized inverse theory and the singular value decomposition theory. The designed controller maked the eigenvalues of the closed-loop system located in a ring of the unit circle, and the variance of each steady state composes to the given constraint. A synthetical designing method is proposed which makes this kind of engineering control system applied generally achieve good dynamic and steady characteristics. This paper derives the existing sufficient and necessary conditions and the expression of solution by a modified algebraic Lyapunov matrix equation, and provides an example. The result is simple, easy for realizing and the designing method has little conservation.

Key words ring pole assignment, steady state variance constraint, discrete system

作者简介

孙 翔, 男, 40 岁, 博士. 研究领域为随机系统的多指标综合, 非线性时滞控制.

王子栋, 男, 30 岁, 博士, 副教授. 研究领域为系统建模, 随机控制及 H_∞ 控制等.

郭 治, 男, 58 岁, 教授, 博士生导师, 国务院学位委员会学科评议组成员, 中国兵工学会理事. 研究领域为随机控制, 火力控制及信息融合.